# Zusatzmaterial Lineare Algebra

## Komplexe Zahlen

Michael Ruhrländer

7.03.2017

# 1 Komplexe Zahlen

## 1.1 Die Menge der komplexen Zahlen

### Einführung

Mit den komplexen Zahlen taucht zum ersten Mal in diesem Anhang ein Objekt der „Höheren Mathematik" auf, das von Studierenden im ersten Semester oftmals am Anfang als schwer verständlich angesehen wird. Das muss aber nicht so sein, insbesondere wenn man einen behutsamen Einstieg dazu wählt. Wir haben gesehen, dass die Gleichung

$$x^2 = 2$$

innerhalb der reellen Zahlen (und zwar durch $x = \pm\sqrt{2}$) lösbar ist, das gilt aber nicht mehr für die Gleichung

$$x^2 = -1,$$

denn innerhalb der reellen Zahlen ist das Quadrat einer Zahl immer größer gleich Null. Nun sagen wir einfach, dass es eine Lösung dieser Gleichung, die wir mit dem Buchstaben $i$ kennzeichnen wollen, geben soll, d.h. es soll gelten:

$$i^2 = -1.$$

Der Buchstabe $i$ soll an das Wort „imaginär" erinnern und man nennt $i$ auch **imaginäre Einheit**.

**Achtung**: In der *Elektrotechnik* wird für die imaginäre Einheit oftmals der Buchstabe $j$ verwendet, um Verwechselungen mit der Bezeichnung für die Stromstärke zu vermeiden!

Wir unterstellen weiterhin, dass wir mit der „Zahl" $i$ rechnen können, als ob es eine reelle Zahl wäre. Zum Beispiel soll gelten:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ 1 \cdot i &= i \end{aligned}$$

oder

$$(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2\, i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1.$$

Wenn wir die Gleichung

$$x^2 = -2$$

betrachten, dann kann diese zu

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = -1$$

umgeformt werden und eine Lösung wäre

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = i,$$

also

$$x = i \cdot \sqrt{2}.$$

Eine weitere Lösung erhalten wir durch

$$x = -i \cdot \sqrt{2},$$

denn nach den obigen Überlegungen folgt

$$x^2 = \left(-i \cdot \sqrt{2}\right)^2 = (-i)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 = -2.$$

D.h die Gleichung

$$x^2 = -2$$

hat die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= i \cdot \sqrt{2} \\ x_2 &= -i \cdot \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Wir verlangen, dass eine Multiplikation von $i$ mit reellen Zahlen wieder ein Element im neuen Zahlenbereich sein soll und darüber hinaus soll diese Multiplikation kommutativ sein, d.h. z.B.

$$i\sqrt{2} = \sqrt{2}\,i,$$

wobei wir wie bei den reellen Zahlen das Multiplikationszeichen „·” der Einfachheit halber weggelassen haben. Wir betrachten nun die etwas kompliziertere quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 6 = 0,$$

die wir umschreiben können zu

$$x^2 - 4x + 4 = -2.$$

Auf der linken Seite steht eine binomische Formel, d.h. es folgt daraus die Gleichung

$$(x-2)^2 = -2$$

und mit den gleichen Überlegungen wie zuvor erhalten wir **eine** Lösung durch

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}} = i,$$

also

$$x = 2 + i\sqrt{2}.$$

Wir verlangen also auch, dass Ausdrücke der Form

$$a + i\,b,$$

wobei $a, b$ reelle Zahlen sind, ebenfalls zum neuen Zahlenbereich gehören sollen. Nun können wir die Menge der komplexen Zahlen definieren.

## Definition der komplexen Zahlen

**Definition 1.1. Komplexe Zahlen**

1. Ausdrücke der Form

   $$c := a + i\,b$$

   mit $a, b \in \mathbb{R}$ und der imaginären Einheit $i$ nennt man **komplexe Zahlen** (in der **algebraischen Form**) und

   $$\mathbb{C} := \{c = a + i\,b; a, b \in \mathbb{R}\}$$

   die **Menge der komplexen Zahlen**.

2. Die *reelle* Zahl a heißt **Realteil von c** ($a = Re(c)$) und die *reelle* Zahl b **Imaginärteil von c** ($b = Im(c)$).

3. Für $b = 0$ ist

   $$c = a + \underbrace{i\,0}_{=0} = a \in \mathbb{R},$$

   $c$ ist also eine reelle Zahl, d.h. die reellen Zahlen sind in den komplexen enthalten:

   $$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

4. Für $a = 0$ ist

   $$c = 0 + i\,b = i\,b.$$

   Komplexe Zahlen mit Realteil Null nennt man auch **rein imaginäre Zahlen**.

5. Zwei komplexe Zahlen $c_1 = a + ib$ und $c_2 = c + id$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ **und zugleich** $b = d$ gilt.

□

## Komplexe Zahlen kann man addieren und multiplizieren

Die Menge der komplexen Zahlen ist also definiert, was noch fehlt, um daraus einen Zahlenbereich zu machen, sind die beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Diese Verknüpfungen definieren wir, indem wir die Gültigkeit der üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen unterstellen.

### Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Seien also

$$c_1 = a + i\,b$$

und

$$c_2 = c + i\,d$$

zwei beliebige komplexe Zahlen. Dann soll gelten

$$c_1 + c_2 = (a + i\,b) + (c + i\,d) = a + c + i\,b + i\,d = \underbrace{a + c}_{\in \mathbb{R}} + i\left(\underbrace{b + d}_{\in \mathbb{R}}\right).$$

Das Ergebnis ist also wieder eine komplexe Zahl mit

$$Re(c_1 + c_2) = a + c \in \mathbb{R}$$

und

$$Im(c_1 + c_2) = b + d \in \mathbb{R}.$$

Analog gilt:

$$c_1 - c_2 = (a + i\,b) - (c + i\,d) = a - c + i\,b - i\,d = \underbrace{a - c}_{\in \mathbb{R}} + i\left(\underbrace{b - d}_{\in \mathbb{R}}\right).$$

Die Regel zur Addition/Subtraktion lautet also:
**Komplexe Zahlen werden addiert/subtrahiert, indem die jeweiligen Real- und Imaginärteile addiert/subtrahiert werden.**

**Beispiel 1.2. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen**

1. Addieren Sie die komplexen Zahlen $3 + 4i$ und $2 + 3i$:

$$(3 + 4i) + (2 + 3i) = 3 + 2 + i\,(4 + 3) = 5 + 7i.$$

2. Addieren Sie die komplexen Zahlen $3 + 4i$ und $2 - 3i$, wobei der Ausdruck $2 - 3i$ eine Kurzschreibweise für $2 + (-3)\,i$ ist:

$$(3 + 4i) + (2 - 3i) = 3 + 2 + i\,(4 - 3) = 5 + i.$$

3. Die zu einer komplexen Zahl

$$c = a + ib$$

**komplex konjugierte** Zahl wird durch

$$\bar{c} = a - ib$$

definiert. Die komplex konjugierte Zahl entsteht also dadurch, dass man in der Ausgangszahl die imaginäre Einheit $i$ durch $-i$ ersetzt.
Addieren Sie zu einer komplezen Zahl $c$ ihre komplex konjugierte Zahl $\bar{c}$:

$$c + \bar{c} = (a + ib) + (a - ib) = a + a + i\,(b - b) = 2a + 0i = 2a,$$

die Summe ist also eine reelle Zahl.
Subtrahieren Sie von einer komplexen Zahl ihre komplex konjugierte:

$$c - \bar{c} = (a + ib) - (a - ib) = a - a + i\,(b - (-b)) = 0 + i\,2b = i\,2b,$$

die Differenz ist also eine rein imaginäre Zahl.

□

### Multiplikation von komplexen Zahlen

Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist etwas komplizierter herzuleiten als die Addition. Wir gehen genauso wie bei der Addition vor, nehmen uns zwei komplexe Zahlen und rechnen wieder nach den Rechenregeln der reellen Zahlen aus:

$$c_1 \cdot c_2 = (a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = a \cdot c + a \cdot i\,d + i\,b \cdot c + i\,b \cdot i\,d.$$

Aus dem zweiten und dritten Term auf der rechten Seite kann man das $i$ ausklammern und den vierten Term ausmultiplizieren. Es ergibt sich unter Weglassen des Multiplikationszeichens auf der rechten Seite

$$c_1 \cdot c_2 = ac + i\,(ad + bc) + i^2\,bd.$$

Nun wissen wir, dass $i^2 = -1$ ist, d.h. wir erhalten abschließend

$$c_1 \cdot c_2 = \underbrace{ac - bd}_{\in \mathbb{R}} + i \left( \underbrace{ad + bc}_{\in \mathbb{R}} \right). \qquad (1.2)$$

Das Ergebnis ist also wieder eine komplexe Zahl mit

$$Re(c_1 \cdot c_2) = ac - bd \in \mathbb{R}$$

und

$$Im(c_1 \cdot c_2) = ad + bc \in \mathbb{R}.$$

Eine leicht zu merkende verbale Regel zur Multiplikation von komplexen Zahlen gibt es leider nicht. Wir werden später in diesem Kapitel sehen, dass man die Multiplikation von komplexen Zahlen allerdings „geometrisch" anschaulich interpretieren kann. Wir schauen uns einige Beispiele an.

**Beispiel 1.3.** **Multiplikation von komplexen Zahlen**

1. Multiplizieren Sie die komplexen Zahlen $3+4i$ und $2+3i$:
$$(3+4i)\,(2+3i) = 3\cdot 2 - 4\cdot 3 + i\,(3\cdot 3 + 4\cdot 2) = -6+17i.$$
2. Multiplizieren Sie die komplexen Zahlen $3+4i$ und $2-3i$:
$$(3+4i)\,(2-3i) = 3\cdot 2 - (4\cdot(-3)) + i\,(3\cdot(-3) + 4\cdot 2) = 18 - i.$$
3. Multiplizieren Sie eine komplexe Zahl mit ihrer komplex konjugierten:
$$c\cdot\bar{c} = (a+ib)\,(a-ib) = a^2 - b\,(-b) + i\,(a(-b)+ab) = a^2+b^2,$$
das Produkt ist also eine reelle Zahl.

□

### Rechengesetze der komplexen Zahlen

Wir haben die Menge der komplexen Zahlen mit zwei Verknüpfungen ausgestattet und fassen die Grundrechenregeln in folgendem Satz zusammen.

**Satz 1.4.** ***Rechengesetze der komplexen Zahlen***

1. **Addition**:
   a) Die Addition ist *assoziativ* und *kommutativ* $\longrightarrow$ Übungsaufgabe.
   b) Das *neutrale Element der Addition* ist die komplexe Zahl Null
   $$0 = 0 + i\,0,$$
   denn ist $c = a+ib$, so folgt
   $$c + 0 = a + ib + (0 + i0) = a + 0 + i\,(b+0) = a + ib.$$
   c) Zu
   $$c = a + ib$$
   ist
   $$-c = -a - ib$$
   das *inverse Element der Addition*, denn
   $$(a+ib) + (-a-ib) = a - a + i\,(b-b) = 0 + i\,0 = 0.$$
2. **Multiplikation**:
   a) Die Multiplikation ist *assoziativ* und *kommutativ* $\longrightarrow$ Übungsaufgabe

b) Das *neutrale Element der Multiplikation* ist die komplexe Zahl 1

$$1 = 1 + i\,0,$$

denn

$$(a+ib)\cdot 1 = a\cdot 1 - b\cdot 0 + i\,(a\cdot 0 + b\cdot 1) = a+ib.$$

c) Zu

$$c = a + ib$$

ist

$$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}$$

das *inverse Element der Multiplikation*. Die letzte Gleichung ist nicht unmittelbar einzusehen, wir leiten diese Schritt für Schritt her und betrachten zunächst den Ausdruck

$$\frac{1}{a+ib}.$$

Der Bruch liegt *nicht* in der Form

$$Re\,(c) + i\,Im\,(c)$$

vor und es ist damit nicht klar, wie Real- und Imaginärteil dieser komplexen Zahl aussehen. Wir müssen den Term also umformen und das $i$ aus dem Nenner entfernen. Dazu wenden wir einen *Standardtrick* an: *wir erweitern den Bruch mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners* und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+ib} &= \frac{(a-ib)}{(a+ib)\,(a-ib)} \underset{Beispiel\,1.3}{=} \frac{a-ib}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass tatsächlich

$$(a+ib)\,\frac{1}{a+ib} = 1$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}(a+ib)\,\frac{1}{a+ib} &= (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}\right)\\ &= \frac{a^2 + i\,ab}{a^2+b^2} - \frac{i\,ab + i^2\,b^2}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a^2 + i\,ab - i\,ab - i^2b^2}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a^2 - i^2b^2}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Nun ist $i^2 = -1$ und wir erhalten

$$(a+ib)\,\frac{1}{a+ib} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

den letzten Bruch durften wir kürzen, da im Zähler und Nenner jeweils die gleiche reelle Zahl steht.

3. **Distributivgesetz** $\longrightarrow$ Übungsaufgabe

□

## Division von komplexen Zahlen

Mithilfe des inversen Elements der Multiplikation können wir jetzt auch die **Division zweier komplexer Zahlen** definieren. Es soll für beliebige $c_1 = a + ib$ und $c_2 = c + id$:

$$\frac{c_1}{c_2} = c_1 \cdot c_2^{-1}$$

gelten. Diese kurze Formel kann man mithilfe der Real- und Imaginärteile folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{a+ib}{c+id} = (a+ib)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - i\,\frac{d}{c^2+d^2}\right) \\
&= \frac{ac + i\,bc - i\,ad - i^2bd}{c^2+d^2} \\
&\underset{i^2=-1}{=} \frac{ac+bd+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

und man erhält wieder eine komplexe Zahl mit

$$Re\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \in \mathbb{R}$$

und

$$Im\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel 1.5.** **Division komplexer Zahlen**

1. Dividieren Sie $c_1 = 9 - i$ durch $c_2 = 3 + 2i$:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{9-i}{3+2i} = \frac{9\cdot 3 + (-1)2}{3^2+2^2} + i\,\frac{(-1)3 - 9\cdot 2}{3^2+2^2} = \frac{25}{13} - i\,\frac{21}{13}.$$

2. Dividieren Sie $c = a + ib$ durch $\bar{c} = a - ib$:
   Wir führen die Rechnung ausführlich durch, indem wir wiederum mit der *komplex konjugierten Zahl des Nenners erweitern*:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\bar{c}} &= \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2 + 2abi + i^2b^2}{a^2+b^2} \\ &\underset{i^2=-1}{=} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\,\frac{2ab}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

□

## 1.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Bislang haben wir die komplexen Zahlen und ihre Rechenregeln eher abstrakt definiert oder hergeleitet. Es gibt aber auch eine „geometrische" Darstellungsform, die auf Carl Friedrich Gauß zurückgeht. Wir definieren die sog. **Gaußsche Zahlenebene** dadurch, dass wir uns - genauso wie bei der Darstellung der euklidischen Ebene - zwei rechtwinklig zueinander stehenden Koordinatenachsen vorstellen, wobei wir auf der $x$-Achse den Realteil $a$ und auf der $y$-Achse den Imaginärteil $b$ einer komplexen Zahl eintragen. Jeder komplexen Zahl entspricht dann genau ein Punkt dieser Zahlenebene, d.h. wir identifizieren die komplexe Zahl $a + ib$ mit dem Punkt $(a, b)$ in der Zahlenebene. Schauen wir uns ein Beispiel an.

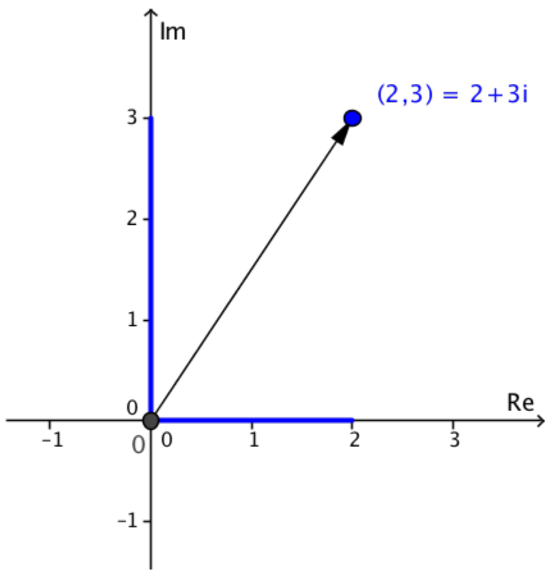


Abbildung 1.1: Gaußsche Zahlenebene

Die komplexe Zahl $2 + 3i$ lässt sich eindeutig als Punkt mit den Koordinaten $(2, 3)$ in der Zahlenebene abbilden. Umgekehrt gehört zu jedem Punkt in der Zahlengeraden genau eine komplexe Zahl. Den schwarzen Verbindungspfeil vom Nullpunkt bis zur komplexen Zahl nennt man auch den **Zeiger** der komplexen Zahl. Die reellen Zahlen haben den Imaginärteil Null, liegen also alle auf der $x$-Achse, die auch **Realteil-Achse (Re)** genannt wird. Die Zahlen auf der **Imaginärteil-Achse (Im)** haben alle den Realteil Null, sind also die rein imaginären Zahlen.

**Beispiel 1.6. Komplexe Zahle in der Zahlenebene**

1. Wo in der Zahlenebene liegt die imaginäre Einheit?
   Es gilt
   $$i = 0 + 1 \cdot i,$$
   d.h. der imaginären Einheit entspricht der Punkt $(0, 1)$, der sich natürlich auf der imaginären Achse befindet.

2. Wo in der Zahlenebene liegt die Zahl $-i$?
   Es gilt
   $$-i = 0 - 1 \cdot i,$$
   d.h. der Zahl $-i$ entspricht der Punkt $(0, -1)$, der sich auch auf der imaginären Achse befindet.

3. Wo in der Zahlenebene liegt die komplexe Zahl $1 + 2i$ und wo die dazu komplex konjugierte Zahl?
   Der zu $1+2i$ korrespondierende Punkt ist $(1, 2)$ und der zu $1-2i$ korrespondierende Punkt ist $(1, -2)$

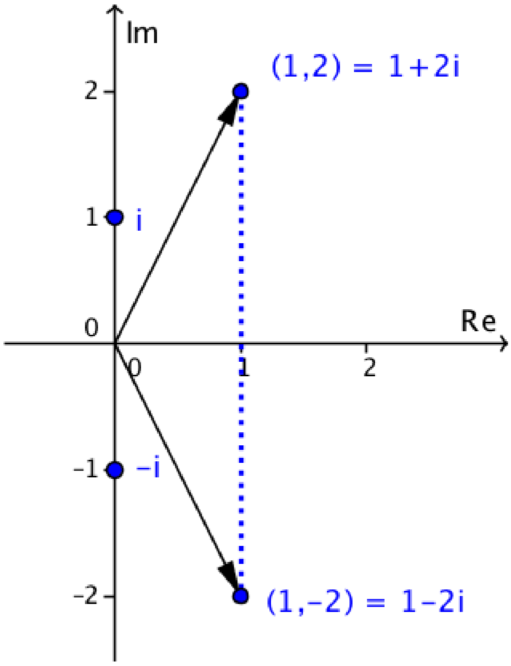


Abbildung 1.2: Zahl und ihre konjugiert komplexe Zahl in der Zahlenebene

In der Abbildung wird deutlich, dass die konjugiert komplexe Zahl aus der Ausgangszahl durch *Spiegelung an der Re-Achse* konstruiert werden kann. Das gilt auch für das Paar $i$ und $-i$.

□

### Betrag einer komplexen Zahl

**Definition 1.7.**

Als **Betrag einer komplexen Zahl** $c = a + ib$ definiert man den Abstand der Zahl zum Nullpunkt in der Gaußschen Zahlenebene, der in den obigen Grafiken jeweils als schwarzer Pfeil gekennzeichnet ist. In der Gaußschen Zahlenebene darf man die euklidische Geometrie anwenden, d.h. man kann den Abstand, den man wie bei den reellen Zahlen mit $|c|$ bezeichnet, mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen. Es ergibt sich

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Betrag von $2 + 3i$, d.h. die Länge der schwarz gestrichelten Linie in Abbildung 1.1 ist also

$$|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Die einzige komplexe Zahl, die den Abstand Null hat, ist die Zahl Null selbst.
Und es gilt, da wir einen Abstand berechen:
*Der Betrag einer komplexen Zahl ungleich Null ist stets eine positive reelle Zahl!*

□

**Beispiel 1.8.** Betrag

1. Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $c = 4 + 3i$:
$$|c| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$
2. Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $c = -\sqrt{2} + 2i$:
$$|c| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}.$$
3. Wir berechnen den Betrag der zu $c$ komplex konjugierten Zahl $\bar{c} = a - ib$:
$$|\bar{c}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c|\,,$$
die Beträge sind also gleich. Wegen
$$c \cdot \bar{c} = (a + ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2$$
gilt
$$c \cdot \bar{c} = |c|^2\,.$$
4. Wir betrachten zwei komplexe Zahlen $c_1 = a + ib$ und $c_2 = c + id$ und berechnen den Betrag des Produktes
$$\begin{aligned}
|c_1 \cdot c_2| &= |ac - bd + i\,(ad + bc)| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2\,(c^2 + d^2) + b^2\,(c^2 + d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\
&= |c_1|\,|c_2|\,.
\end{aligned}$$
Wir erhalten also das gleiche Resultat wie bei den reellen Zahlen.

□

## Addition komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Die Addition bzw. Subtraktion zweier komplexer Zahlen erfolgt komponentenweise, d.h. sind
$$c_1 = a + ib, c_2 = c + id$$

zwei komplexe Zahlen, so ist die Summe gleich

$$c_1 + c_2 = a + c + i\,(b + d)\,.$$

Die korrespondierenden Punkte in der Gaußschen Zahleneben addieren sich also durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,,$$

also genauso wie die Komponenten von Vektoren in der euklidischen Ebene. Daher kann man die Summe von zwei komplexen Zahlen wie in der Vektorrechnung grafisch mit der sogenannten **Parallelogrammregel** veranschaulichen:

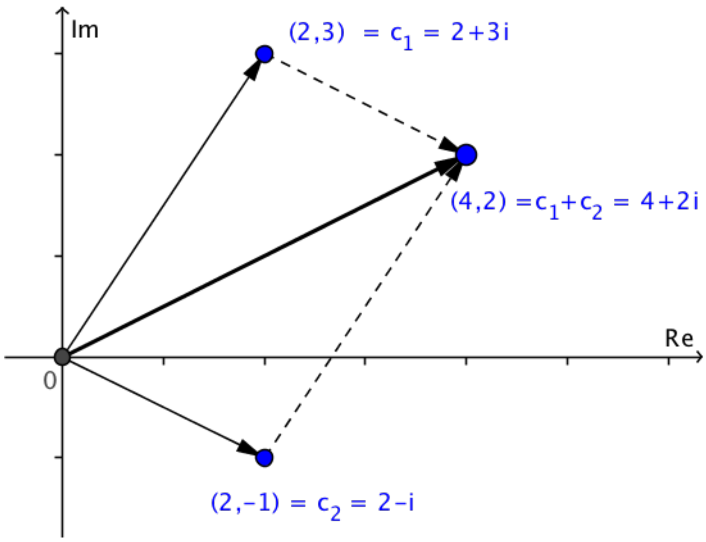


Abbildung 1.3: Grafische Addition zweier komplexer Zahlen

Zur Addition setzt man jeweils den (gestrichelten) Zeiger der einen Zahl an die Pfeilspitze der anderen Zahl an und erhält dadurch ein Parallelogramm. Die Diagonale des Parallelogramms ist dann der Zeiger der Summe der beiden Zahlen.

## 1.3 Alternative Darstellungsformen von komplexen Zahlen

In der euklidischen Ebene lässt sich ein Punkt $P = (x, y)$ auch durch sogenannte **Polarkoordinaten** identifizieren. Dazu muss man den Abstand des Punktes $P$ zum Nullpunkt und den Winkel zwischen positiver $x$-Achse und der Verbindungslinie vom Nullpunkt zu $P$ kennen. Dieses Konzept übertragen wir 1:1 für Punkte der Gaußschen Zahlenebene.

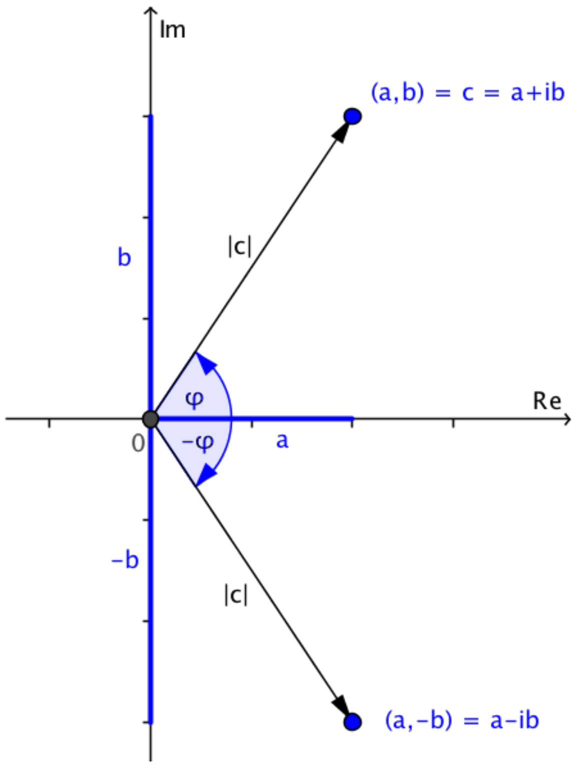


Abbildung 1.4: Trigonometrische Normalform einer komplexen Zahl

**Definition 1.9. Trigonometrische und exponentielle Form einer komplexen Zahl**

1. Bezeichnet $\varphi$ den Winkel zwischen der positiven Re-Achse und dem Zeiger der komplexen Zahl $c = a + ib$ in der Zahlenebene, so gilt

$$\cos\varphi = \frac{a}{|c|}, \sin\varphi = \frac{b}{|c|},$$

woraus sich

$$a = |c|\cos\varphi, b = |c|\sin\varphi$$

ergibt

2. Setzt man dies in die algebraische Normalform ein, so folgt

$$c = a + ib = |c|\cos\varphi + i\,|c|\sin\varphi = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Diese Darstellung heißt **trigonometrische Normalform**. Den Winkel $\varphi$ nennt man auch das **Argument** von $c$ und schreibt kurz $\varphi = arg\,(c)$.

3. *Achtung*: für $c = 0$ ist $\varphi$ nicht erklärt. Außerdem ist die trigonometrische Darstellung nicht eindeutig, da $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ *$2\pi$-periodisch*. Deshalb legen wir das Intervall, in dem $\varphi$ variieren kann, auf $(-\pi, \pi]$ fest. Dieser im technischen Bereich übliche **Hauptwert** des Arguments benutzt immer den kleinstmöglichen Drehwinkel zwischen positiver Re-Achse und der komplexen Zahl. Liegt die komplexe Zahl im dritten oder vierten Quadranten, d.h. ist der Imaginärteil eine negative reelle Zahl, so wird der Winkel im mathematisch negativen Sinn gemessen, er ist also negativ (siehe obige Grafik).

4. Ersetzt man in der trigonometrischen Normalform den Ausdruck

$$\cos\varphi + i\sin\varphi$$

nach der sogenannten **Eulerformel** durch

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

dann lässt sich jede komplexe Zahl schreiben als

$$c = |c|\, e^{i\varphi}.$$

Diese Darstellung heißt **Exponentialform** der komplexen Zahl. Per Konvention wird das Argument $\varphi$ bei der Exponentialform *immer im Bogenmaß* angegeben. Zur Umrechnung von Grad- in Radiant ($rad$) und umgekehrt ist folgende Formel nützlich:

$$\frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi}\, rad,$$

also z.B.

$$\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

□

**Beispiel 1.10. Trigonometrische und exponentielle Form**

1. Stellen Sie die komplexe Zahl $c = 1 + i$ in der trigonometrischen und der exponentiellen Form dar:

   a) Zunächst berechnen wir den Betrag von $c$:

   $$|c| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

   b) Nun müssen wir noch den Winkel $\varphi$ bestimmen. Dazu reicht es in diesem Beispiel zu wissen, wo sich die komplexe Zahl in der Zahlenebene befindet. Die Real- und Imaginärteile sind beide gleich 1, d.h. der gesuchte korrespondierende Punkt ist $(1, 1)$. Dieser Punkt liegt auf der Winkelhalbierenden ($y = x$) und damit ist der gesuchte Winkel 45°. Wir erhalten also als trigonometrische Form

   $$c = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right).$$

c) Um die Exponentialform aufzustellen, müssen wir den Winkel $\varphi$ vom Gradmaß ins Bogenmaß umrechnen. Es gilt $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, also folgt

$$c = \sqrt{2}\, e^{i\,\frac{\pi}{4}}.$$

2. Vor einigen Jahren gab es eine Umfrage unter amerikanischen Mathematikern, was für sie die „*schönste Gleichung der Mathematik*" ist. Gewählt wurde die Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

angeblich, da sie drei wichtige Konstanten der Mathematik (Eulersche Zahl $e$, Kreiszahl $\pi$ und imaginäre Einheit $i$) und die beiden „Urzahlen" 0 und 1 beinhaltet. Ist diese Gleichung überhaupt richtig? Das können wir jetzt zeigen, es gilt nämlich

$$e^{i\pi} + 1 = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin\pi}_{=0} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

□

## Umrechnen der Darstellungsformen

Wir wollen nun komplexe Zahlen, die in der einen Darstellungsform vorliegen, in die jeweils beiden anderen umformen.

- Liegt eine komplexe Zahl in der Exponentialform vor, so können wir die trigonometrischen Form direkt hinschreiben:

$$c = |c|\, e^{i\varphi} \Rightarrow c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

- Ist umgekehrt eine komplexe Zahl in der trigonometrischen Form vorgegeben, so können wir nach ev. notwendiger Umwandlung des Arguments $\varphi$ ins Bogenmaß die Exponentialform direkt ableiten

$$c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow c = |c|\, e^{i\varphi}.$$

- Ist eine komplexe Zahl in der Exponentialform gegeben und wir wollen die algebraische Form ermitteln, so wandeln wir zunächst die Exponentialform in die trigonometrische Form um und berechnen dann die Real- und Imaginärteile von $c = a + ib$ durch

$$\begin{aligned} a &= |c|\cos\varphi \\ b &= |c|\sin\varphi. \end{aligned}$$

Ein Zahlenbeispiel dazu: Sei $c = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ gegeben, dann folgt

$$c = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

- Zur Berechnung der Sinus- und Kosinuswerte der Argumente ist folgende Tabelle, in der die wichtigsten Winkel aufgeführt sind, oftmals hilfreich.

| **Funktion** | **0°** | **30°** | **45°** | **60°** | **90°** |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\varphi$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ |
| $\cos\varphi$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

Tabelle 1.1: Wichtige Werte der trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$

Die Umformungen der Normalformen von exponentiell in trigonometrisch bzw. in algebraisch sind also relativ einfach durchzuführen. Will man eine komplexe Zahl in algebraischer Form in die trigonometrische bzw. exponentielle Form umformen, so muss man insbesondere das zugehörige Argument ermitteln. Dazu formulieren wir den nächsten Satz.

**Satz 1.11.** ***Die Argumentfunktion***
*Bei der Umstellung einer kompexen Zahl*

$$c = a + ib \neq 0$$

*von algebraisch zu trigonometrisch bzw. exponentiell muss der Betrag $|c|$ und der Winkel $\varphi$ bestimmt werden:*

1. Den Betrag ermitteln wir durch
$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. Für den Winkel $\varphi$ gilt $\cos\varphi = \frac{a}{|c|}$. Die Berechnung von $\varphi$ erfolgt mit der sog. ***Argumentfunktion***
$$arg : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi]$$
mit
$$arg\,(c) = arg\,(a + ib) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{|c|}\right) & f\ddot{u}r\, b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{|c|}\right) & f\ddot{u}r\, b < 0 \end{cases},$$
dabei ist $\arccos x$ die *Umkehrfunktion* von $\cos x$. Die Argumentfunktion liefert den im Bogenmaß gemessenen Winkel $\varphi$ zwischen der Verbindungslinie des Nullpunktes

mit einem Punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ und der positiven Re-Achse. Dabei wird immer der betragsmäßig kleinere Winkel gewählt. Die folgende Grafik erläutert diese Definition.

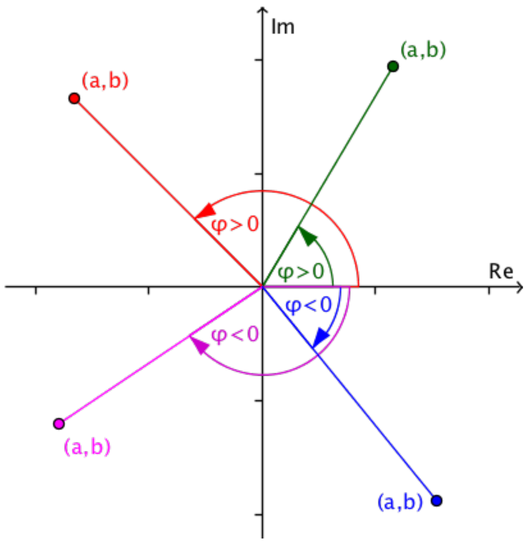


Abbildung 1.5: Die Argumentfunktion

In jedem Quadranten ist ein beliebiger Punkt $(a, b)$, die Verbindungsstrecke zum Nullpunkt sowie der Winkel $\varphi$ zur positiven Re-Achse eingezeichnet.

a) Für $b \geq 0$ ist $\varphi \geq 0$,
b) für negative $b$ -Werte ist $\varphi$ negativ.
c) Für $y = 0, x < 0$ ist $\varphi = \pi$ und
d) für $y = 0, x > 0$ ist $\varphi = 0$.

□

**Beispiel 1.12. Darstellungsformen umrechnen**

1. Die komplexe Zahl $c = 5(\cos 135° + i \sin 135°)$ ist in algebraischer Normalform darzustellen. Dazu müssen wir die Kosinus- und Sinuswerte ausrechnen und benutzen dazu folgende Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \cos(90° + \alpha) &= -\cos(90° - \alpha) \\ \sin(90° + \alpha) &= \sin(90° - \alpha)\,. \end{aligned}$$

Also folgt mit Tabelle 1.1:

$$\begin{aligned} \cos 135° = \cos(90° + 45°) &= -\cos(90° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 135° = \sin(90° + 45°) &= \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Und daraus

$$c = 5(\cos 135° + i \sin 135°) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

2. Wie sieht die komplexe Zahl $c = 4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$ in der Exponentialform aus?
   a) Zunächst berechnen wir den Betrag von $c$:
   $$|c| = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8.$$
   b) Mit der Argumentfunktion wird der Winkel $\varphi$ bestimmt:
   $$\varphi = \arccos\left(\frac{Re\,(c)}{|c|}\right) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{2}}{8}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°\hat{=}\frac{\pi}{4}.$$

   Also folgt:
   $$c = 8(\cos 45° + i \sin 45°) = 8e^{i\,\frac{\pi}{4}}.$$
3. Die komplexe Zahl $c = \sqrt{3} - i$ ist in die Exponentialform zu bringen.
   a) Wir berechnen den Betrag von $c$:
   $$|c| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$
   b) Bei der Anwendung der Argumentfunktion müssen wir beachten, dass der Imganinärteil von $c$ negativ $(= -1)$ ist. Wir erhalten:
   $$\varphi = -\arccos\left(\frac{Re\,(c)}{|c|}\right) = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -30° = -\frac{\pi}{6}$$

   Also folgt:
   $$c = 2e^{i\,\frac{-\pi}{6}}.$$

□

### Rechenregeln für komplexe Zahlen in trigonometrischer bzw. exponentieller Form

Wir wollen uns anschauen, wie die Rechengesetze für komplexe Zahlen in den anderen Darstellungsformen aussehen. Zuvor sei aber betont, dass die **Addition und die Subtraktion von komplexen Zahlen immer in der algebraischen Normalform** erfolgen. Liegen die zu addierenden/subtrahierenden Zahlen nicht in der algebraischen Normalform vor, so müssen diese zunächst umgestellt und dürfen erst danach berechnet werden.

**Beispiel 1.13. Addition von komplexen Zahlen in unterschiedlicher Darstellungsform**

Addieren Sie

$$c_1 = 3(\cos(30°) + i\sin(30°))$$

und

$$c_2 = 3 + i.$$

Zunächst muss $c_1$ in die algebraische Normalform gebracht werden:

$$c_1 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right),$$

dann kann addiert werden

$$c_1 + c_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3}{2} + 3 + i = \frac{6+3\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{5}{2}.$$

□

Für Herleitung der Gesetzte der Multiplikation und Division von komplexen Zahlen in trigonometrischer oder exponentieller Form benötigen wir einen Hilfssatz („Lemma”) über einige *Additionstheoreme der trigonometrischen Fuktionen*.

**Lemma 1.14.** ***Additionstheoreme von Sinus und Kosinus***
*Es gelten folgende Formeln:*

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\\
\sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\\
\cos(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\\
\sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2.
\end{aligned}$$

□

**Satz 1.15.** ***Rechengesetze für komplexe Zahlen in trigonometrischer oder exponentieller Form***
*Seien*

$$c_1 = |c_1|\,e^{i\varphi_1}$$

*und*

$$c_2 = |c_2|\,e^{i\varphi_2}$$

*zwei beliebige komplexe Zahlen.*

1. **Komplexe Konjugation**:
   Die zu $c_1$ komplex konjugierte Zahl ist nach Abbildung 1.4

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= |c_1|\, e^{i(-\varphi_1)} = |c_1|\, e^{-i\varphi_1} \\
&= |c|\left(\cos\left(-\varphi_1\right) + i\sin\left(-\varphi_1\right)\right) \\
&= |c|\left(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1\right).
\end{aligned}
$$

   In allen Darstellungen wird also $i$ durch $-i$ ersetzt.
   Die letzte Gleichung folgt übrigens aus der Achsensymmetrie von $\cos x$:

$$\cos\left(-x\right) = \cos x$$

   und aus der Punktsymmetrie zum Nullpunkt von $\sin x$:

$$\sin\left(-x\right) = -\sin x.$$

2. **Multiplikation**:
   Für die trigonometrischen Form erhalten wir genauso wie in Gleichung (1.2):

$$
\begin{aligned}
c_1 \cdot c_2 &= |c_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) \cdot |c_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) \\
&= |c_1|\,|c_2|\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)
\end{aligned}
$$

   Nun wenden wir die ersten zwei Additionstheoreme aus Lemma 1.14 an und es ergibt sich:

$$c_1 \cdot c_2 = |c_1|\,|c_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right.$$

   **Bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert**.
   Für die Exponentialform folgt sofort

$$c_1 \cdot c_2 = |c_1|\, e^{i\varphi_1}\, |c_2|\, e^{i\varphi_2} = |c_1|\,|c_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

3. **Division**:
   Für die trigonometrischen Form erhält man genauso wie in (1.3):

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{|c_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{|c_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} \\
&= \frac{|c_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{|c_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} \cdot \frac{|c_2|\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)}{|c_2|\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)} \\
&= \frac{|c_1|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right)}{|c_2|\left(\underbrace{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}_{=1}\right)} \\
&= \frac{|c_1|}{|c_2|}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Wir wenden wir die letzten zwei Additionstheoreme aus Lemma 1.14 an und es ergibt sich:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|}{|c_2|} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

**Bei der Division von zwei komplexen Zahlen werden die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert.**
Für die Exponentialform folgt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{|c_1|}{|c_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

□

*Bemerkung* 1.16. Die kompliziert anmutende Herleitung der Formeln für die Multiplikation und Division kann man umgehen, wenn man den Ausdruck $e^{i\varphi}$ als **komplexe Exponentialfunktion** ansieht, für die die gleichen Rechenregeln wie für die reelle Exponentialfunktion gelten. Dann folgt nämlich wie im reellen sofort

$$|c_1|\, e^{i\varphi_1} \cdot |c_2|\, e^{i\varphi_2} = |c_1|\, |c_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Den Weg, den wir beschritten haben, ist elementarer, da wir ja gerade erst die komplexen *Zahlen* einführen und nicht schon auf weiterführende komplexe *Funktionen* zurück- bzw. vorgreifen wollten.
□

**Beispiel 1.17. Multiplikation und Division**

1. Multiplizieren Sie $c_1 = 9e^{i\pi}$ mit $c_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$:
$$c_1 c_2 = 9e^{i\pi} 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 36e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 36e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

2. Multiplizieren Sie die komplexe Zahl $c = |c|\, e^{i\varphi}$ mit ihrer komplex konjugierten Zahl:
$$c\bar{c} = |c|\, e^{i\varphi}\, |c|\, e^{-i\varphi} = |c|^2\, e^{i(\varphi - \varphi)} = |c|^2 \underbrace{e^{i\cdot 0}}_{=1} = |c|^2$$
und natürlich erhalten wir das gleiche Ergebnis wie in der algebraischen Form.

3. Dividieren Sie $c_1 = 9 - 2i$ durch $c_2 = 4 + i$:
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{9 - 2i}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{(36 - 2) + i(-8 - 9)}{17} = 2 - i$$

4. Dividieren Sie $c_1 = 8e^{i\,\frac{4\pi}{3}}$ durch $c_2 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$:
Zunächst muss $c_2$ in Exponentialform gebracht werden:
$$c_2 = 4e^{i\,\frac{\pi}{3}}.$$
Dann erfolgt die Division
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{8e^{i\,\frac{4\pi}{3}}}{4e^{i\,\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\,(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\pi} = -2.$$

□

#### Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Auch die Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch interpretiert werden. Durch die Addition der Argumente wird der Zeiger der ersten Zahl um den Winkel der zweiten gedreht und durch die Multiplikation der Beträge wird die Länge des ersten Zeigers gestreckt (wenn $|c_2| \geq 1$) bzw. gestaucht (wenn $|c_2| < 1$). Deshalb nennt man die Multiplikation von komplexen Zahlen auch **Drehstreckung**.

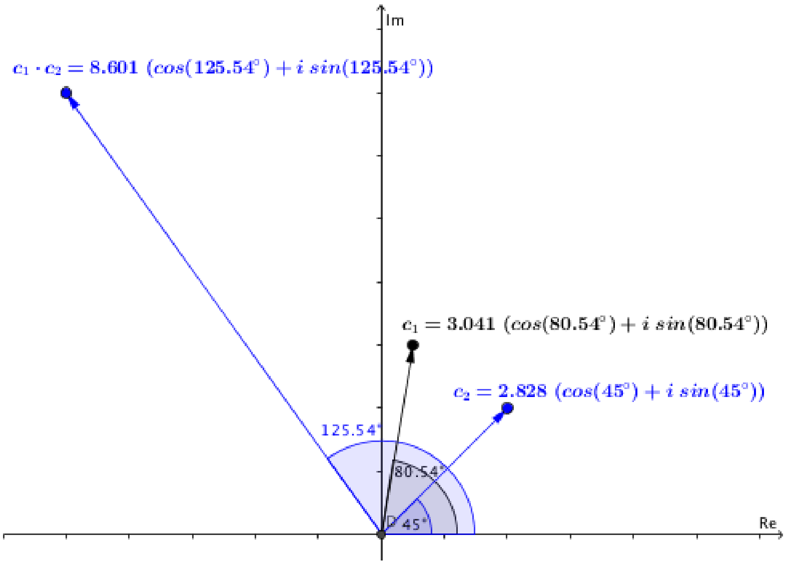


Abbildung 1.6: Grafische Multiplikation zweier komplexer Zahlen

## 1.4 Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

#### Potenzen komplexer Zahlen

Wie bei den reellen Zahlen ist das Potenzieren im Komplexen ein Spezialfall der mehrfachen Multiplikation einer Zahl mit sich selbst. Das Potenzieren von komplexen Zahlen wird üblicherweise **nur für Zahlen in der trigonometrischen oder exponentiellen Form** durchgeführt. Zahlen in der algebraischen Form kann zwar auch potenzieren, die Ausdrücke werden aber schnell unübersichtlich.

**Definition 1.18.** **Potenzen von komplexen Zahlen**
Sei

$$c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |c|\,e^{i\varphi}$$

eine beliebige komplexe Zahl. Dann wird die $n$-te Potenz $c^n$ von $c$ in der Exponentialform definiert durch

$$c^n = \underbrace{|c|\, e^{i\varphi} \cdot |c|\, e^{i\varphi} \cdot \cdots \cdot |c|\, e^{i\varphi}}_{n\,mal} = |c|^n\, e^{i(\varphi+\varphi+\cdots+\varphi)} = |c|^n\, e^{i\,n\varphi}.$$

In der trigonometrischen Form folgt analog

$$c^n = |c|^n\,(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi)\,.$$

Diese Rechengesetze zur Berechnung von Potenzen nennt man auch **Formeln von *de Moivre***.

□

**Beispiel 1.19. Potenzen von komplexen Zahlen**

1. Berechnen Sie die dritte Potenz von $c = 3e^{i\,\frac{\pi}{2}}$:
$$c^3 = 3^3 e^{i\,3\,\frac{\pi}{2}} = 27e^{i\,\frac{3\pi}{2}}.$$
2. Berechnen Sie die vierte Potenz von $c = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$:
Zunächst bringen wir $c$ in die Exponentialform.
   a)
   $$|c| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$
   b) Das Argument $\varphi$ berechnet sich durch
   $$\varphi = \arccos\frac{a}{c} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

   Also folgt:
   $$c^4 = \left(2e^{i\,\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 2^4 e^{i\,\frac{4\pi}{4}} = 16e^{i\pi} = -16.$$
3. Mit den Formeln von *de Moivre* kann man auch elegant einige *Additionstheoreme* der trigonometrischen Funktionen beweisen:
   a) $n = 2$: Nach der Formel von *de Moivre* gilt
   $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$
   Wir rechnen die linke Seite aus:
   $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\,\cos\varphi\sin\varphi + (i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i\,2\cos\varphi\sin\varphi,$$
   da $i^2 = -1$ ist. Nun vergleichen wir die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten und erhalten:
   $$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\\ \sin 2\varphi &= 2\cos\varphi\sin\varphi.\end{aligned}$$

b) $n = 3$: Es gilt nach *de Moivre*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Wieder rechnen wir die linke Seite aus:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 &= \cos^3\varphi + 3\,\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi\,(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3\\ &= \cos^3\varphi + i\,3\,\cos^2\varphi\sin\varphi + i^2 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi.\end{aligned}$$

Nun ist $i^2 = -1$ und $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, so dass folgt

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\,\left(3\,\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)$$

und wieder durch Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\\ \sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.\end{aligned}$$

4. Wir rechnen den Betrag von $c^n$ aus:

$$\begin{aligned}|c^n| &= \left||c|^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\right| \underset{\textit{Beispiel}\,(1.8)}{=} |c|^n\,|(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)|\\ &= |c|^n\sqrt{\underbrace{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi}_{=1}}\\ &= |c|^n\,.\end{aligned}$$

Also gilt wie bei den reellen Zahlen $|c^n| = |c|^n$.

□

### Fundamentalsatz der Algebra und Wurzeln komplexer Zahlen

Aus der Schule ist bekannt, dass eine **algebraische Gleichung $n$-ten Grades**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

wobei die $a_i$ reeelle Zahlen sind, höchstens $n$ reelle Lösungen besitzt. Lässt man für die $a_i$ und für die Unbekannte $x$ komplexe Zahlen zu, so gibt es für eine solche komplexe Gleichung immer genau $n$ (komplexe) Lösungen. Dieses wichtiges Ergebnis formulieren wir nochmals als mathematischen Satz.

**Satz 1.20.** ***Fundamentalsatz der Algebra***

1. Eine algebraische Gleichung $n$-ten Grades

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

hat in der Menge der komplexen Zahlen *immer genau $n$ Lösungen*. Diese Lösungen werden auch **Wurzeln** der Gleichung genannt.

2. Die linke Seite der Gleichung ist ein komplexes **Polynom $n$-ten Grades** mit den komplexen **Koeffizienten** $a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Sind $z_1, z_2, \cdots, z_n$ die $n$ Lösungen der Gleichung, so lässt sich das Polynom in **Linearfaktoren** zerlegen:

   $$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n\,(z - z_1)\,(z - z_2) \cdots (z - z_n)\,,$$

   wobei die Ausdrücke $z - z_i$ **Linearfaktoren** heißen.

3. Sind alle Koeffizienten $a_i$ *reelle Zahlen*, so ist mit einer Lösung $z_1 = a + ib$ *auch die komplex konjugierte Zahl* $\bar{z}_1 = a - ib$ eine Lösung der algebraischen Gleichung.

□

**Beispiel 1.21. Lösung einer algebraischen Gleichung 3. Grades**
Die algebraische Gleichung 3. Grades

$$z^3 - z^2 + 2z - 2 = 0$$

hat nach dem letzten Satz genau drei (komplexe) Nullstellen. Wenn wir $z = 1$ in die Gleichung einsetzen, so folgt

$$1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 0,$$

d.h. $z = 1$ ist eine (reelle) Lösung. Zur Bestimmung der beiden anderen Lösungen dividieren wir die linke Seite durch $z - 1$, d.h. wir führen eine **Polynomdivision** durch

$$\begin{array}{llll}
z^3 - z^2 & +2z & -2 & : (z-1) = z^2 + 2 \\
z^3 - z^2 & \downarrow & \downarrow & \\
\hline
\quad 0 & +2z & -2 & \\
 & +2x & -2 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}.$$

Die Nullstellen von $z^2 + 2$ haben wir in (1.1) ermittelt, so dass sich insgesamt die drei Lösungen

$$z_1 = 1, z_2 = i\sqrt{2}, z_3 = -i\sqrt{2}$$

ergeben. Da alle Koeffizienten der Gleichung reelle Zahlen sind, ist mit

$$z_2 = i\sqrt{2}$$

auch die komplex konjugierte Zahl

$$\bar{z}_2 = z_3 = -i\sqrt{2}$$

eine Lösung.

□

**Definition 1.22. Wurzeln komplexer Zahlen**
Eine besonders einfache Gestalt hat eine algebraische Gleichung der Gestalt

$$z^n = c,$$

wobei

$$c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |c|\,e^{i\varphi}$$

eine beliebige komplexe Zahl ist. Die $n$ **unterschiedlichen** Lösungen der Gleichung nennt man **n-te Wurzeln aus** $c$.

□

Um die Lösungen zu finden machen wir für $z$ den *Ansatz*

$$z = |z|\,e^{i\alpha}.$$

Die $n$-te Potenz von $z$ muss gleich $c$ sein, d.h. es muss gelten

$$z^n = |z|^n\,e^{i\,n\alpha} = |c|\,e^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

Zwei komplexe Zahlen in der exponentiellen oder trigonometrischen Form sind gleich, wenn die Beträge und die Argumente übereinstimmen. D.h. wir können aus der letzten Gleichung ableiten, dass der Betrag der gesuchten Zahl $z$ die Gleichung

$$|z|^n = |c|$$

erfüllen muss. Nicht ganz so einfach ist die Ermittlung des Arguments, da wir beachten müssen, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus $2\pi$-periodisch sind, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\varphi + k\cdot 2\pi) &= \sin\varphi\\ \cos(\varphi + k\cdot 2\pi) &= \cos\varphi\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Damit ist auch die komplexe Expontentialfunktion periodisch und es folgt

$$e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)} = e^{i\varphi}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Setzen wir das in die Bestimmungsgleichung (1.4) für $|z|$ und $\alpha$ ein, so erhalten wir

$$|z|^n\,e^{i\,n\alpha} = |c|\,e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)}$$

und daraus die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}|z|^n &= |c|\\ n\alpha &= \varphi + k\cdot 2\pi.\end{aligned}$$

Auflösen nach $|z|$ und $\alpha$ ergibt

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt[n]{|c|}\\ \alpha &= \frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung hat zunächst unendlich viele Lösungen, da wir aber nach dem Fundamentalsatz und der obigen Definition nur $n$ *unterschiedliche* Lösungen suchen, betrachten wir nur die $n$ ganzen Zahlen $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Dadurch ist sichergestellt, dass die komplexen Zahlen

$$e^{i\,\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}}$$

alle verschieden sind. Wir erhalten zusammengefasst folgendes Ergebnis.

**Satz 1.23.** ***Wurzeln komplexer Zahlen***
*Genau wie beim Potenzieren müssen auch bei Wurzelziehen die komplexen Zahlen in der trigonometrischen oder exponentiellen Form vorliegen.*

1. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung

   $$z^n = c = |c|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |c|\,e^{i\varphi}$$

   besteht aus n Elementen

   $$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \sqrt[n]{|c|}\left(e^{i\left(\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right)}\right); k = 0, 1, \cdots, n-1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right)\right); k = 0, 1, \cdots, n-1 \right\} \end{aligned}$$

2. Die $n$-ten Wurzeln werden auch mit $c^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet.

3. Die $n$-ten Wurzeln sind für $k = 0, 1, \cdots, n-1$ verschieden, wiederholen sich aber für $k \geq n$ (nachrechnen!).

4. Die komplexen Wurzel haben alle denselben Betrag, liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und mit $r = \sqrt[n]{|c|}$ als Radius und bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen $n$-Ecks.

5. **„Jede komplexe Zahl außer Null hat genau $n$ verschiedene $n$-te Wurzeln."**

□

**Beispiel 1.24.** **Wurzeln komplexer Zahlen**

1. Berechnen Sie die dritten Wurzeln von $c = 4\sqrt{2} + i\,4\sqrt{2}$.
   Zunächst bringen wir $c$ in die Exponentialform:

   $$c = 4\sqrt{2} + i\,4\sqrt{2} = 8e^{i\,\frac{\pi}{4}}.$$

   Die dritten Wurzeln ergeben sich durch

   $$\mathbb{L} = \left\{ \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi}{3}\right)}; k = 0, 1, 2 \right\} = \left\{ 2e^{i\,\frac{\pi}{12}}, 2e^{i\,\frac{9\pi}{12}}, 2e^{i\,\frac{17\pi}{12}} \right\}.$$

2. Berechnen Sie die fünften komplexen Wurzeln von $c = -1$. Der Betrag von $c$ ist 1, das Argument berechnet sich durch

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-1}{1}\right) = \arccos(-1) = \pi,$$

alternativ kann man auch argumentieren, dass der Zeiger einer negativen reellen Zahl auf der negativen Re-Achse liegt, also ist der Winkel zwischen der positiven Re-Achse und dem Zeiger 180°. *Negative reelle Zahlen haben immer das Argument $\pi = 180°$*. Es folgt also

$$c = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

und daraus

$$\mathbb{L} = \left\{\sqrt[5]{1}e^{i\left(\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{5}\right)}; k = 0,1,2,3,4\right\} = \left\{e^{i\,\frac{\pi}{5}}, e^{i\,\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}, e^{i\,\frac{7\pi}{5}}, e^{i\,\frac{9\pi}{5}}\right\},$$

also ist auch $e^{i\pi} = -1$ eine (von 5 komplexen) Lösungen. Das gilt allgemein: **In der Lösungsmenge von komplexen Wurzeln einer reellen Zahl sind die reellen Lösungen stets enthalten**.

3. **Einheitswurzeln**: Die Gleichung $z^6 = 1$ hat sechs verschiedene Lösungen, die in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Einheitskreis liegen und diesen in sechs gleiche Teile teilen, d.h. sie bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Da der Zeiger der reellen Zahl 1 auf der positiven Re-Achse liegt, ist das Argument gleich Null, oder allgemeiner: *Positive reelle Zahlen haben immer das Argument $0°$*. Es gilt

$$\begin{aligned}
1^{\frac{1}{6}} &= \left(1 \cdot e^{i\cdot 0}\right)^{\frac{1}{6}} = \left\{e^{i\left(\frac{k\cdot 2\pi}{6}\right)}; k = 0,\cdots,5\right\} = \left\{e^{i\,\frac{0}{6}}, e^{i\,\frac{2\pi}{6}}, e^{i\,\frac{4\pi}{6}}, e^{i\,\frac{6\pi}{6}}, e^{i\,\frac{8\pi}{6}}, e^{i\,\frac{10\pi}{6}}\right\} \\
&= \left\{1, e^{i\,\frac{\pi}{3}}, e^{i\,\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{i\,\frac{4\pi}{3}}, e^{i\,\frac{5\pi}{3}}\right\} \\
&= \{1, \cos 60° + i\sin 60°, \cos 120° + i\sin 120°, -1, \cos 240° + i\sin 240°, \cos 300° + i\sin 300°\} \\
&= \left\{1, \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Auch hier sind die beiden reellen Lösungen $\pm 1$ wieder enthalten und die anderen bilden zwei Paare komplex konjugierter Zahlen. Die nachfolgende Grafik zeigt die Lösungen in der Zahlenebene:

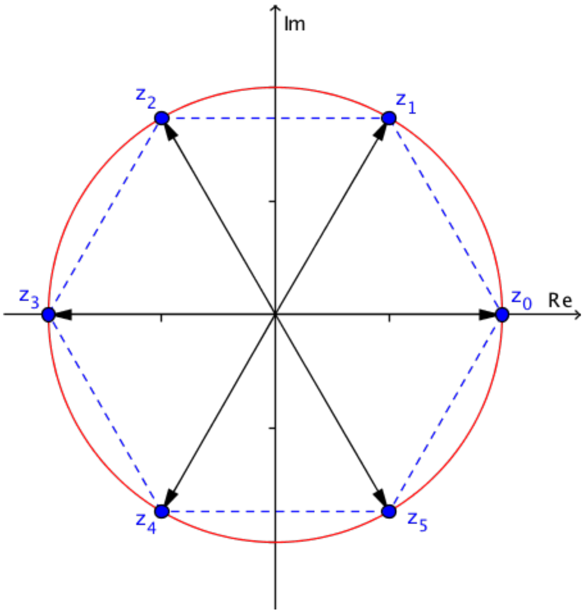


Abbildung 1.7: Die Einheitswurzeln $z^6 = 1$

4. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass die komplexen Wurzeln positiver reeller Zahlen dieselben Werte wie im Reellen liefern. Zu berechnen sind die Quadratwurzeln der Zahl 4. Es gilt
$$4 = 4e^{i\cdot 0},$$
also folgt
$$4^{\frac{1}{2}} = \left\{2e^{i\left(\frac{k\cdot 2\pi}{2}\right)}; k = 0, 1\right\} = \left\{2e^{i0}, 2e^{i\pi}\right\} = \{2, -2\}.$$

□

## Quadratische Gleichungen

Wir wollen uns abschließend mit der Lösung von **quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten** beschäftigen. Diese Gleichungen haben die generelle Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ und können nach Division durch $a$ in die äquivalente **p-q-Form** gebracht werden:
$$x^2 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}.$$
Um diese Gleichung zu lösen, bringen wir $q$ auf die andere Seite und erhalten

$$x^2 + px = -q.$$

Wir wollen die linke Seite als Quadrat eines Terms ausdrücken und addieren dazu auf beiden Seiten die **quadratische Ergänzung** $\frac{p^2}{4}$:

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} \quad = \quad \frac{p^2}{4} - q.$$

Die linke Seite kann mit der binomischen Formel umgeschrieben werden und es folgt

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{1.5}$$

Wir können also folgendes Ergebnis notieren.

**Satz 1.25.** ***Lösungen von quadratischen Gleichungen***

1. Unter der *Voraussetzung, dass die* **Diskriminante**

$$D = p^2 - 4q \geq 0$$

*ist*, ist die rechte Seite der Gleichung (1.5) größer gleich Null und wir können die (reelle) Wurzel ziehen:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

In diesem Fall erhalten wir also die beiden Lösungen (**p-q-Formel**)

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= \quad -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ x_2 \quad &= \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Ist die Diskriminante kleiner als Null, müssen wir die komplexen Quadratwurzeln aus der negativen reellen Zahl

$$c = \frac{p^2}{4} - q$$

ziehen. Wir erhalten

$$c^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sqrt{\left|\frac{p^2}{4} - q\right|}\, e^{i\,\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{2}} ; k = 0, 1 \right\}.$$

Nun gilt

$$\left|\frac{p^2}{4} - q\right| = q - \frac{p^2}{4}$$

und wir können vereinfachen:

$$c^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, e^{i\,\frac{\pi}{2}}, \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, e^{i\,\frac{3\pi}{2}} \right\} = \left\{ i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, -i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right\}.$$

In diesem Fall ergeben sich die beiden Lösungen zu (**komplexe p-q-Formel**)

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \end{aligned}$$

die Lösungen sind also komplex konjugierte Zahlen.

Zusammengefasst hat eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten

- *zwei unterschiedliche reelle* Lösungen, wenn die Diskriminante $D > 0$ ist,
- *eine reelle* Doppellösung $\left(x = \frac{p}{2}\right)$, wenn $D = 0$ ist, und
- *zwei komplex konjugierte* Lösungen, wenn $D < 0$ ist.

□

**Beispiel 1.26. Komplexe p-q-Formel**
Finden Sie die Lösungen von

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Anwenden der komplexen p-q-Formel ergibt

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm i\sqrt{4} = 1 \pm 2i.$$

□

Zusammenfassend gibt folgende Tabelle nochmals einen Überblick über die verschiedenen Zahlenmengen und Beispiele von Gleichungen, die in den entsprechenden Mengen nicht lösbar sind.

| **Mengen** | **Grundoperationen** | **nicht lösbar** |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ natürliche Zahlen | $+ \quad \cdot$ | $x + 1 = 0$ |
| $\mathbb{Z}$ ganze Zahlen | $+ \quad - \quad \cdot$ | $2x = 1$ |
| $\mathbb{Q}$ rationale Zahlen | $+ \quad - \quad \cdot \quad \backslash$ | $x^2 = 2$ |
| $\mathbb{R}$ reelle Zahlen | $+ \quad - \quad \cdot \quad \backslash$ | $x^2 = -1$ |
| $\mathbb{C}$ komplexe Zahlen | $+ \quad - \quad \cdot \quad \backslash$ | |

## Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Addition von komplexen Zahlen assoziativ und kommutativ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Multiplikation von komplexen Zahlen assoziativ und kommutativ ist.

3. Zeigen Sie, dass für die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen das Distributivgesetz gilt.

4. Zeigen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen
$$|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|\,.$$

5. Gegeben seien
$$c_1 = 1 + i\sqrt{3}$$
und
$$c_2 = -\sqrt{3} + 3i.$$
Berechnen Sie
$$c_1 c_2, \frac{c_1}{c_2}$$
jeweils in algebraischer und exponentieller Form.

6. Lösung:
   a) $c_1 c_2 = (1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + 3i) = (-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) + i(3 - 3) = -4\sqrt{3}$
   b) $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 3i} \cdot \dfrac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3i - 3i}{3 + 9} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{1}{2}i$
   c) Darstellung von $c_1, c_2$ in Exponentialform:
   $|c_1| = 2; \cos\varphi = \dfrac{a_1}{|c_1|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60° = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow c_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
   $|c_2| = 2\sqrt{3}; \cos\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow c_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$
   d) $c_1 c_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\sqrt{3}e^{i\pi} = -4\sqrt{3}$
   e) $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

7. Berechnen Sie $\dfrac{18\,(\cos 14° + i\sin 14°)}{3\,(\cos 46° + i\sin 46°) \cdot 6\,(\cos 58° + i\sin 58°)}$

8. Berechnen Sie $c^6 = \left(\dfrac{3}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$

9. Stellen Sie $\cos 4x$ und $\sin 4x$ jeweils in einer Summe von Potenzen von $\cos x$ bzw. $\sin x$ dar.

10. Geben Sie im Komplexen alle Lösungen an von

    a) $z^4 + 81 = 0$

    b) $z^6 + 1 = \sqrt{3}i$

11. Welche Punktmenge wird durch $Im\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = 0$ beschrieben?

    (Hinweis: Setzen Sie $z = x + iy$ und berechnen Sie zunächst den Imaginärteil von $\frac{z-1}{z+i}$).