Zusatzmaterial zum Brückenkurs Mathematik

Elementare Geometrie

Michael Ruhrländer

10.09.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Geometrie

Die Geometrie ist ein fester Bestandteil des Mathematikunterrichtes an Schulen, ist aber üblicherweise in den technischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen nicht mehr Gegenstand von Vorlesungen. Sie wird in vielen Anwendungsfächern vorausgesetzt und oftmals hilft ein geometrisches Vorstellungsvermögen dabei, komplizierte Sachverhalte zu verstehen und Problemlösungen zu finden. Hier werden die notwendigen Grundkenntnisse der **elementaren Geometrie** vermittelt, d.h. wir beschäftigen uns mit Winkeln, Geraden, Dreiecken, Kreisen und Körpern, ganz überwiegend ohne bei den Definitionen und Herleitungen auf Koordinatensysteme zurückzugreifen.

1.1 Geraden, Winkel

Wir führen die geometrischen Begriffe nicht streng mathematisch, sondern gemäß unserer „naiven" Anschauung ein.

Definition 1.1. Gerade, Strecke, Strahl, Winkel

- Eine **Gerade** ist eine Linie in der Ebene, die nach beiden Seiten ins Unendliche geht. Durch zwei voneinander verschiedene Punkte A und B geht genau eine Gerade.
- Die Menge der Punkte auf der Geraden, die zwischen den beiden Punkten liegen, nennt man **Strecke** zwischen A und B und schreibt dafür $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{AB}$ ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B.
- Zwei Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Schneiden sich zwei Geraden überhaupt nicht, so heißen sie **parallele Geraden** (**Parallelen**). Für parallele Geraden g und g' schreibt man kurz $g \parallel g'$.
- Ein **Strahl** hat einen Anfangspunkt und geht nur zu einer Seite ins Unendliche.
- Ein **Winkel** entsteht durch eine Drehung eines Strahls a um seinen Anfangspunkt S. Nennt man den gedrehten Strahl b, so kennzeichnet das Symbol $\angle(a, b)$ den Winkel zwischen den beiden Strahlen. Den Punkt S nennt man den **Scheitelpunkt** des Winkels, die beiden Strahlen a und b werden **Schenkel** des Winkels genannt. Da es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, den Strahl zu drehen, muss zur Messung eines Winkels zusätzlich die Drehrichtung angegeben werden:
  - Dreht man den Ausgangsstrahl gegen den Uhrzeigersinn, der auch **mathematisch positiver Drehsinn** genannt wird, so ist der Winkel eine positive reelle Zahl.

- Dreht man den Ausgangsstrahl mit dem Uhrzeigersinn (**mathematisch negativer Drehsinn**), so ist der Winkel negativ.

Es ist also zu unterscheiden zwischen den Winkeln (a, b) und (b, a), zwischen ihnen gilt die Beziehung

$$\angle(a, b) = -\angle(b, a).$$

Liegt auf dem Strahl a ein Punkt A und auf b ein Punkt B, so kann der Winkel (a, b) auch durch $\angle ASB$ bezeichnet werden.

Das nachfolgende Bild verdeutlicht nochmals diese Definitionen.

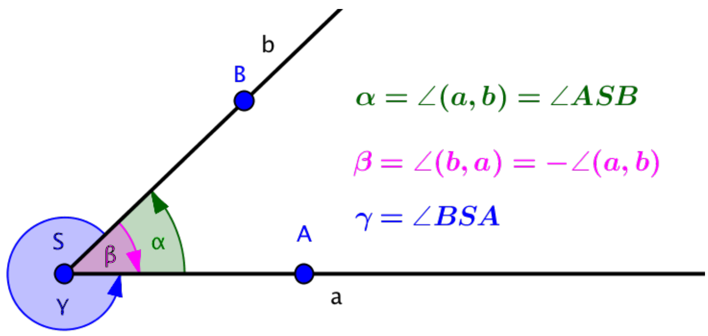


Abbildung 1.1: Winkel zwischen zwei Strahlen a und b

Winkel werden üblicherweise mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. In der Grafik sind drei Winkel α, β, γ eingezeichnet und ihre Orientierungen durch Pfeile kenntlich gemacht. Die Winkel α und γ sind positiv orientiert, das ist der in der Mathematik übliche Richtungssinn, d.h. wenn nichts anderes gesagt wird, wird *immer eine positive Orientierung* unterstellt. Aus diesem Grunde ist der Winkel γ, den man auch als Winkel zwischen den Strahlen a und b ansehen kann, auch *nicht* gleich dem Winkel β!

Winkelmessung

Definition 1.2. Grad- und Bogenmaß
Winkel werden entweder im **Gradmaß** oder im **Bogenmaß** gemessen. Die beiden Winkelmaße beruhen auf **Kreisteilungen**:

- Gradmaß: Wird ein beliebiger Kreis durch Radien in 360 gleiche Teile geteilt, so entspricht der Richtungsunterschied zweier Radien, die vom Kreismittelpunkt zu zwei benachbarten Teilpunkten auf dem Kreis führen, einem Winkel von einem Grad und man benutzt dafür das Symbol $1°$. Ein Grad ist also der 360. Teil eines **Vollwinkels** bzw. der 90. Teil eines **rechten Winkels**. Die Gradskala kann noch weiter unterteilt werden: 1 Grad sind 60 **Winkelminuten** und eine Winkelminute sind 60 **Winkelsekunden**. Man schreibt:

$$1^\circ = 60' = 3600''.$$

- Bogenmaß: Bei dem Bogenmaß misst man den Winkel durch Angabe der Länge des Kreisbogens b, der entsteht, wenn man um den Scheitelpunkt des Winkels einen Kreis mit dem Radius 1 schlägt und das zwischen den Schenkeln des Winkels verlaufende Kreisbogenstück hernimmt, was in der nachfolgenden Grafik gezeigt wird.

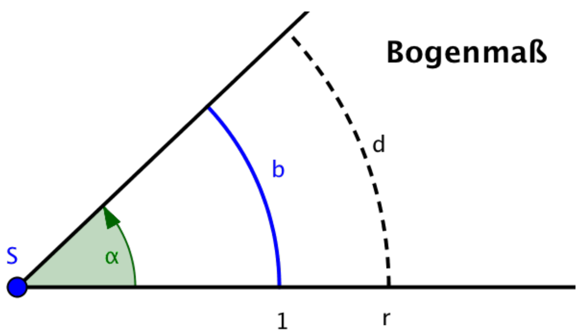


Abbildung 1.2: Winkel im Bogenmaß

Dabei macht man sich zunutze, dass im Kreis die Länge eines beliebigen Kreisbogens d dem zugehörigen Winkel α und dem Radius r proportional ist. Genauer gilt, dass das Verhältnis vom Kreisumfang zum Kreisbogen gleich dem Verhältnis des Vollwinkels zum Winkel α ist. Da der Umfang eines Kreises $2\pi r$ beträgt, gilt also

$$2\pi r : d = 360 : \alpha.$$

Daraus folgt, dass das Verhältnis $d : r$ nur von dem zum Kreisbogen d gehörigen Winkel α abhängt

$$d : r = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha.$$

Für den Kreisbogen b ist der Radius gleich 1, d.h. es gilt

$$b = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha.$$

Die Einheit des Bogenmaßes heißt **Radiant (rad)**. 1 rad ist der Winkel, für den der Kreisbogen b gleich 1 ist, d.h.

$$1\,rad = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,29578^\circ.$$

Umgekehrt gilt

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,rad = 0,017453\,rad. \tag{1.1}$$

Beispiel 1.3. Tabelle Grad- und Bogenmaß
In der folgenden Tabelle werden einige wichtige Winkel im Grad- und Bogenmaß gegenüber gestellt.

Gradmaß	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$	$57,29578°$
Bogenmaß	$\frac{\pi}{6}\,rad$	$\frac{\pi}{4}\,rad$	$\frac{\pi}{3}\,rad$	$\frac{\pi}{2}\,rad$	$\pi\,rad$	$2\pi\,rad$	$1\,rad$

□

Beispiel 1.4. Umrechnung zwischen den Winkelmaßen
Berechnen Sie den Winkel

$$\alpha = 51°14'4,2''$$

im Bogenmaß.
Lösung: Zunächst wandeln wir die Winkelsekunden in Winkelminuten um:

$$4,2'' \cdot \frac{1'}{60''} = 0,07'.$$

Damit ist der Winkel

$$\alpha = 51°14,07'.$$

Nun wandeln wir die Minuten in Grad um:

$$14,07' \cdot \frac{1°}{60'} = 0,2345°$$

und α ergibt sich zu

$$\alpha = 51,2345°.$$

Wir benutzen die Umrechnungsformel (1.1) und erhalten

$$\alpha = 51,2345° = 51,2345 \cdot 0,017453\,rad = 0,8942\,rad.$$

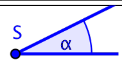
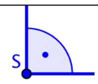
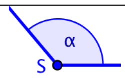
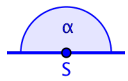
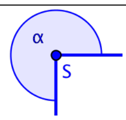
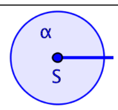
Einteilung der Winkel

Definition 1.5.
Winkel werden nach dem Richtungsunterschied der Schenkel eingeteilt:

- Entspricht der Richtungsunterschied einer Drehung um einen Viertelkreis, so bezeichnet man den Winkel als **rechten Winkel** ($\alpha = 90°$).
- Ist die gegenseitige Neigung der Schenkel geringer als bei einem rechten Winkel, so wird der Winkel **spitzer Winkel** ($0 \leq \alpha < 90°$) genannt.
- Entspricht der Richtungsunterschied der Schenkel einer Drehung um einen Halbkreis, liegen die Schenkel also in entgegen gesetzter Richtung auf einer gemeinsamen Geraden, so heißt der zwischen ihnen gebildete Winkel **gestreckt** ($\alpha = 180°$).

- Liegt die Neigung der Schenkel zwischen einem rechten und einem gestreckten Winkel, so bezeichnet man den Winkel als **stumpfen Winkel** ($90° < \alpha < 180°$).
- Ein **Vollwinkel** ($\alpha = 360°$) entspricht einer Drehung um einen Vollkreis.
- Liegt schließlich die Drehung zwischen einem Halb- und einem Vollkreis, so nennt man den zugehörigen Winkel **überstumpf** ($180° < \alpha < 360°$).

Die folgende Tabelle fasst diese Definitionen nochmals zusammen.

Winkel α	**Definition**	**Abbildung**
spitz	$0° \leq \alpha < 90°$	
rechter	$\alpha = 90°$	
stumpf	$90° < \alpha < 180°$	
gestreckt	$\alpha = 180°$	
überstumpf	$180° < \alpha < 360°$	
voll	$\alpha = 360°$	

Wie in der Tabelle dargestellt wird ein rechter Winkel häufig durch einen Punkt gekennzeichnet.

Beispiel 1.6. Winkel in der Abbildung 1.1
In der Abbildung ist

- der Winkel α ein spitzer Winkel,
- der Winkel β ein spitzer Winkel
- der Winkel γ ein überstumpfer Winkel,
- die Summe aus den Winkeln α und γ ein Vollwinkel,

Winkel an Geraden und Parallelen

Definition 1.7. Winkel an sich schneidenden Geraden
Schneiden sich zwei Geraden g und g' in der Ebene in einem Punkt S, dann entstehen vier Winkel.

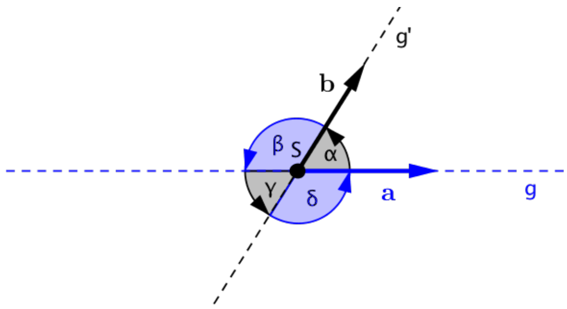


Abbildung 1.3: Winkel an zwei sich schneidenden Geraden

Winkel, die einen gemeinsamen Schenkel haben, heißen **Nebenwinkel.** Die nicht zusammenfallenden Schenkel liegen auf ein und derselben Geraden, jedoch auf unterschiedlichen von S ausgehenden Strahlen. Sie ergänzen sich gegenseitig zu einem gestreckten Winkel. Aus der Abbildung liest man ab, dass die Paare

$$(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \delta), (\delta, \alpha)$$

Nebenwinkel sind, da

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°.$$

Die beiden Winkel eines Nebenwinkelpaares, z.B. α und β, sind im Allgemeinen verschieden groß; sind sie gleich, dann gilt

$$\alpha = \beta = 90°,$$

d.h. die beiden Geraden stehen senkrecht aufeinander.

Winkel an sich schneidenden Geraden, die einen gemeinsamen Scheitel S, aber keinen gemeinsamen Schenkel haben, heißen **Scheitelwinkel**. In der Grafik sind α und γ sowie β und δ Scheitelwinkel.

Satz 1.8. ***Scheitelwinkel***
Zwei Scheitelwinkel sind gleich (in obiger Abbildung $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$), da jeder von ihnen durch denselben Nebenwinkel zu 180° ergänzt wird.

□

Definition 1.9. Winkelpaare an geschnittenen Parallelen
Wird ein Paar paralleler Geraden (g, g') durch eine weitere Gerade geschnitten, so entstehen acht Winkel.

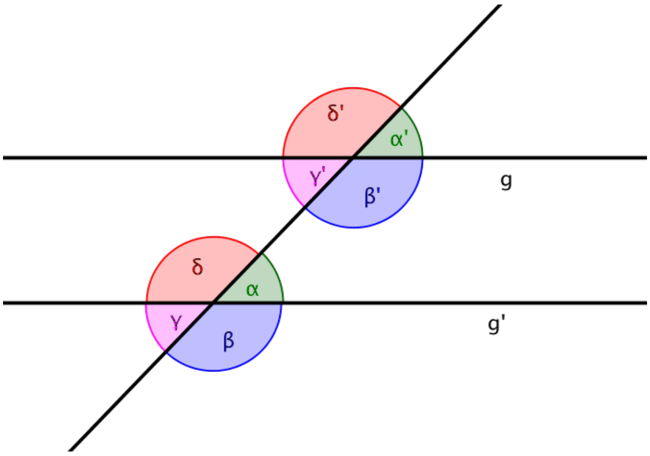


Abbildung 1.4: Winkel an geschnittenen Parallelen

Haben zwei der acht Winkel

1. einen gemeinsamen Scheitelpunkt, dann sind es
   a) **Scheitelwinkel**, falls die Schenkel paarweise entgegengesetzt gerichtet sind. In der Grafik sind die Paare
   $$(\alpha, \gamma), (\alpha', \gamma'), (\beta, \delta)\ (\beta', \delta')$$
   Scheitelwinkel.
   b) **Nebenwinkel**, falls zwei Schenkel auf demselben Strahl liegen und die anderen zwei entgegengesetzt gerichtet sind. Z.B. sind die Paare (α, β) bzw. (γ', δ') Nebenwinkel.
2. von einander verschiedene Scheitelpunkte, dann sind es
   a) **Stufenwinkel**, falls die Schenkel paarweise gleichgerichtet sind. In der Abbildung sind die Paare
   $$(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta'), (\gamma, \gamma'), (\delta, \delta')$$
   Stufenwinkel.
   b) **Wechselwinkel**, falls die Schenkel paarweise entgegengerichtet sind. Die Paare
   $$(\alpha, \gamma'), (\gamma, \alpha'), (\beta, \delta'), (\delta, \beta')$$
   sind Wechselwinkel.
   c) **Ergänzungswinkel**, falls ein Schenkelpaar gleichgerichtet, das andere entgegengesetzt gerichtet ist. Z.B. sind die Paare (α, β') bzw. (γ, δ') Ergänzungswinkel.

Aus der letzten Definition lassen sich folgende Aussagen ableiten.

Satz 1.10. ***Stufenwinkel, Wechselwinkel, Ergänzungswinkel***
Werden zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten, so

1. sind alle Stufenwinkel gleich groß,
2. sind alle Wechselwinkel gleich groß,
3. addieren sich alle Ergänzungswinkel zu 180°.

Es gilt auch die Umkehrung:
Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten und sind die Stufen- oder die Wechselwinkel gleich groß oder addieren sich die Ergänzungswinkel zu 180 *°, so sind die beiden Geraden parallel.*

Beispiel 1.11. Winkelsumme im Dreieck

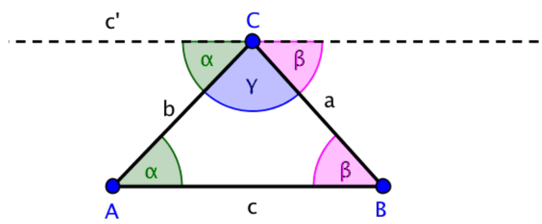


Abbildung 1.5: Winkelsumme um Dreieck

Um die Summe der Winkel

$$\alpha + \beta + \gamma$$

im Dreieck ABC auszurechnen, legen wir eine (gestrichelte) Parallele c' zur Seite c durch den Punkt C. Der Winkel α taucht noch einmal als Wechselwinkel mit Schenkel b und c' auf, ebenso der Winkel β mit den Schenkeln a und c'. Die drei Winkel ergänzen sich zu 180°, d.h. die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Aus diesem Sachverhalt folgt unmittelbar, dass die *Winkelsumme in einem Viereck* 360° beträgt, da man jedes Vierecks in zwei Dreiecke zerlegen kann, wenn man durch zwei gegenüberliegende Ecken die Diagonale zieht.

Beispiel 1.12. Winkel an senkrechten Schenkeln
Wir wollen zeigen, dass zwei Winkel, deren Schenkel senkrecht aufeinander stehen, gleich groß sind und betrachten folgende Abbildung.

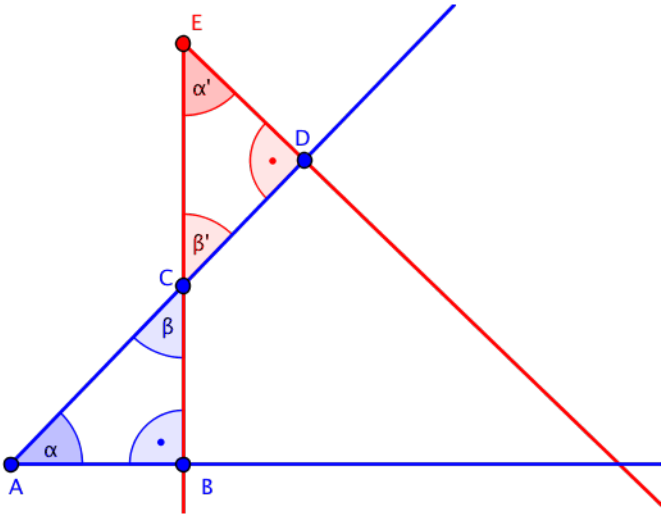


Abbildung 1.6: Winkel an senkrechten Schenkeln

Die Grafik enthält einen blauen Winkel α mit Scheitelpunkt A und einen roten Winkel α' mit Scheitelpunkt E. Die Schenkel von α' schneiden die Schenkel von α jeweils im rechten Winkel, was durch *einen Punkt im Winkel* gekennzeichnet ist. Die Gleichheit von α und α' folgt nun daraus, dass die beiden Winkel β und β' Wechselwinkel, also gleich groß sind. Da die Dreiecke ABC und CDE jeweils einen rechten Winkel besitzen und die Winkel β und β' gleich sind, folgt mit der Winkelsumme im Dreieck

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 180^\circ - 90^\circ - \beta' = \alpha'.$$

Aufgaben zu Abschnitt 1.1

1. Rechnen Sie die Winkelangaben in Radiant bzw. Grad um:
   a) $171,887^\circ$
   b) $\pi/12$
   c) $2,5$
   d) $38^\circ 14' 22''$
2. Leiten Sie aus der Winkelsummensatz für Dreiecke die entsprechenden Winkelsummen für allgemeine Fünfecke und Sechsecke her.
3. In der folgenden Abbildung ist das rechtwinkliges Dreieck ABC von einem Rechteck umrahmt. Die beiden Winkel α und β sind vorgegeben. Drücken Sie alle anderen Winkel mit Hilfe von α und β aus.

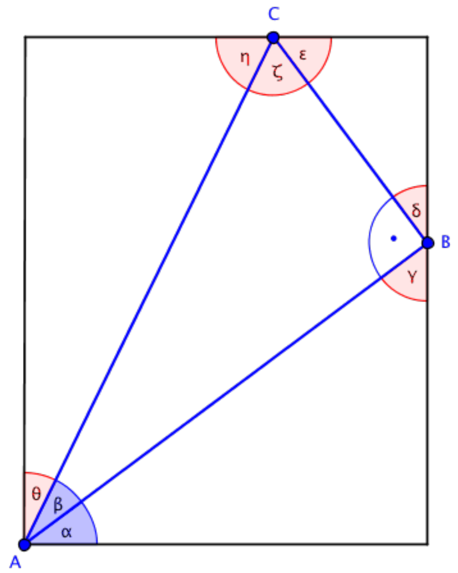


Abbildung 1.7: Abschnitt 1.1, Aufgabe 3

1.2 Kongruenz und Symmetrie

1.2.1 Kongruenz

Definition 1.13. Kongruenz allgemein
Zwei Figuren in der Ebene heißen **kongruent** (**deckungsgleich**), wenn sie durch geometrische Transformationen, die nur die Lage der Figuren, nicht aber die Größe von Strecken und Winkeln verändern, ineinander überführt werden können. Die geometrischen Transformationen können aus **Verschiebungen**, **Drehungen** um ein Drehzentrum Z oder **Spiegelungen** an Geraden bestehen. Die folgende Abbildung verdeutlicht diese Definitionen.

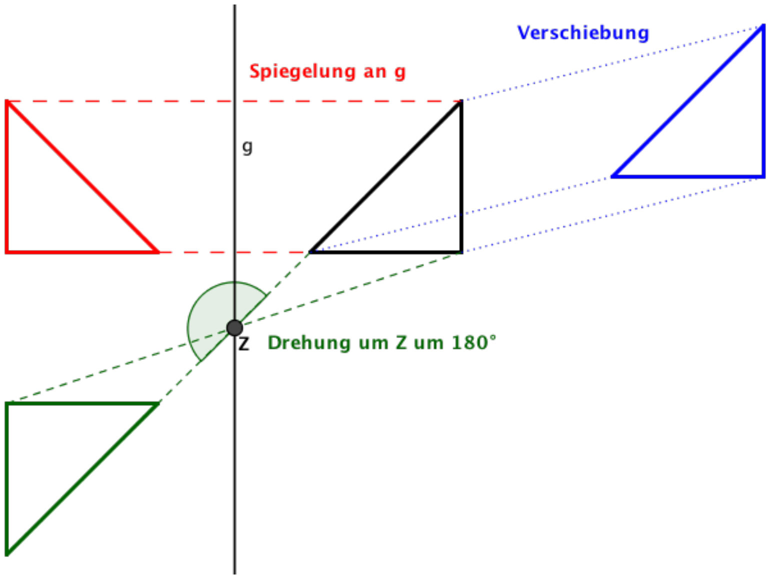


Abbildung 1.8: Geometrische Transformationen: Verschiebung, Drehung, Spiegelung

In der Grafik wird das schwarze Dreieck durch eine (blaue) Verschiebung, eine (rote) Spiegelung an der Geraden g sowie durch eine (grüne) Drehung um den Punkt Z um 180° in der Ebene verschoben. Bei diesen Transformationen ändern sich die Größen der Dreiecksseiten und -winkel nicht, damit bleibt auch der Flächeninhalt des Dreiecks erhalten.

In der Definition von Kongruenz von Figuren ist die Übereinstimmung aller Stücke gefordert, insbesondere müssen bei kongruenten Dreiecken *alle* Seiten und *alle* Winkel gleich sein. Das führt zur Frage, wieviele Stücke in zwei Dreiecken übereinstimmen müssen, damit die Dreiecke schon kongruent sind. Die Antwort liefert der folgende Satz.

Satz 1.14. ***Kongruenzsätze des Dreiecks***
Dreiecke sind kongruent, wenn sie

1. in den drei Seiten übereinstimmen **(SSS) oder**
2. in zwei Seiten und dem zwischen ihnen gelegenen Winkel übereinstimmen **(SWS) oder**
3. in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen **(SsW) oder**
4. in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen **(WSW)**.

Den vierten Kongruenzsatz kann man noch etwas abschwächen, indem man nur verlangt, dass eine Seite und zwei beliebige Winkel übereinstimmen **(SWW)**. Denn kennt man die beiden der Seite anliegenden Winkel nicht, sondern nur einen und den gegenüber liegenden, so kann man den fehlenden anliegenden leicht berechnen, da man ja weiß, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Die Gültigkeit der Kongruenzsätze folgt daraus, dass man Dreiecke eindeutig konstruieren kann, wenn die angegebenen Stücke bekannt sind. Als Beispiel konstruieren wir ein Dreieck, bei dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen.

Beispiel 1.15. **SWS**
Bei einem Dreieck seien die Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel α vorgegeben. Die folgende Abbildung zeigt die vorgenommene Konstruktion des Dreiecks.

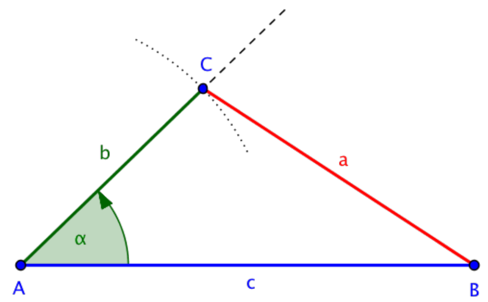


Abbildung 1.9: Kongruenz von Dreiecken: SWS

Zunächst wird die Strecke $c = \overline{AB}$ gezeichnet. Im Punkt A wird der Winkel α so abgetragen, dass der eine Schenkel die Strecke c und der andere frei (in der Grafik die gestrichelte Linie) ist. Nun wird um den Punkt A ein Kreis mit dem Radius b geschlagen (Kreisbogenabschnitt als gepunktete Linie). Der Kreis schneidet den freien Schenkel im Punkt C. Verbindet man A mit C, so erhält man die Strecke b und verbindet man B mit C, so ergibt sich die Strecke a. Damit ist das Dreieck ABC in eindeutiger Weise aus den bekannten Stücken konstruiert worden.

Sind, anders als beim dritten Kongruenzsatz verlangt, zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüber liegende Winkel bekannt, so lässt sich daraus im Allgemeinen keine eindeutige Dreieckskonstruktion herleiten, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 1.16. **Ssw**
Seien für die Konstruktion eines Dreiecks die Seiten $c = 5\,cm, a = 3\,cm$ und der Winkel $\alpha = 20°$ vorgegeben. Dann zeichnen wir zunächst wieder die Strecke $c = \overline{AB}$ und tragen im Punkt A den Winkel α so ab, dass der eine Schenkel die Strecke c und der andere frei ist. Um die Lage der Strecke a zu finden, zeichnen wir um den Punkt B einen Kreis mit Radius a. Dieser Kreis schneidet den freien Schenkel in *zwei* Punkten C und C' . D.h. die beiden unterschiedlichen Dreiecke ABC und ABC' erfüllen beide die Voraussetzungen, es gibt keine eindeutige Konstruktion! Das nachfolgende Bild stellt diese Situation nochmals dar.

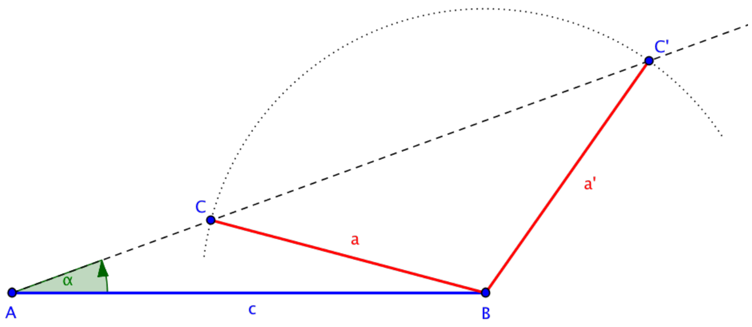


Abbildung 1.10: Kongruenz von Dreiecken: Ssw

Anwendungsbeispiel aus der Optik

Um geometrische Aufgaben zu lösen, muss man oftmals nicht nur Grundkonstruktionen ausführen, sondern auch Symmetrieüberlegungen, Kongruenz- oder Winkelsätze einfließen lassen. Wir wollen das an einem Beispiel aus der Optik demonstrieren.

Beispiel 1.17. **Reflexion von Lichtstrahlen**
Ein Lichtstrahl, der von einer Lichtquelle L ausgeht kann einen Punkt P nur erreichen, wenn er an einer Geraden g reflektiert wird. An welchem Punkt S muss der Lichtstrahl auf die Gerade treffen, damit er durch den Punkt P geht? Die folgende Skizze beschreibt die Aufgabenstellung.

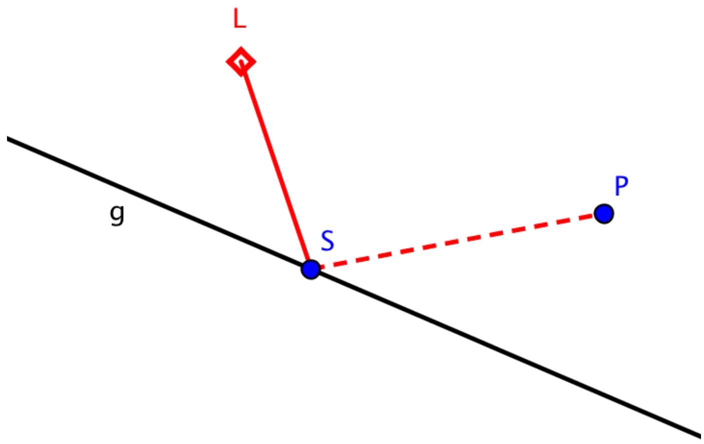


Abbildung 1.11: Reflexion eines Lichtstrahl

Gesucht ist also die Lage des Punktes S. Um die zu finden, müssen wir das aus der Optik bekannte **Reflexionsgesetz** (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) benutzen. D.h. der Winkel mit den Schenkeln $\overline{LS}$ und g muss gleich groß sein wie der Winkel zwischen g und $\overline{SP}$. Um die Aufgabe zu lösen, spiegeln wir zunächst den Punkt P an der Geraden

g, indem wir um P einen Kreis mit einem Radius, der größer als der Abstand zwischen P und g ist, zeichnen.

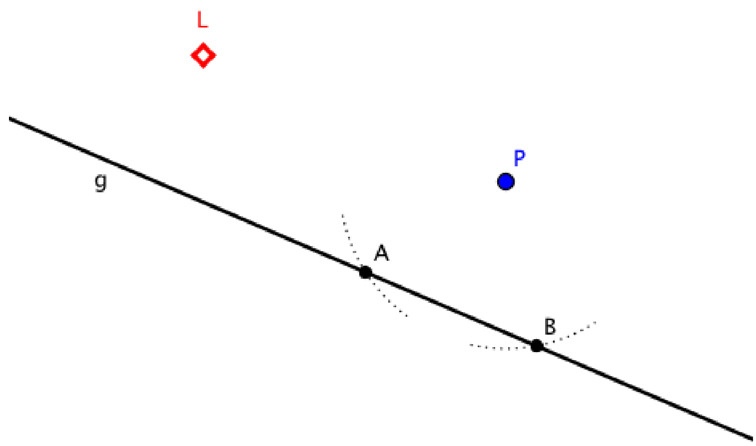


Abbildung 1.12: Zwischengrafik 1: Reflexion Lichtstrahl

Dieser Kreis schneidet die Gerade g in den beiden Punkten A und B, die beide gleich weit entfernt von P sind. Nun beschreiben wir um die Punkte A und B jeweils einen Kreis mit Radius $\overline{AP} = \overline{BP}$. Diese beiden Kreise schneiden sich im Punkt P und in einem Punkt P', der der gesuchte Spiegelpunkt von P ist. Schauen wir uns die nächste Zwischengrafik an.

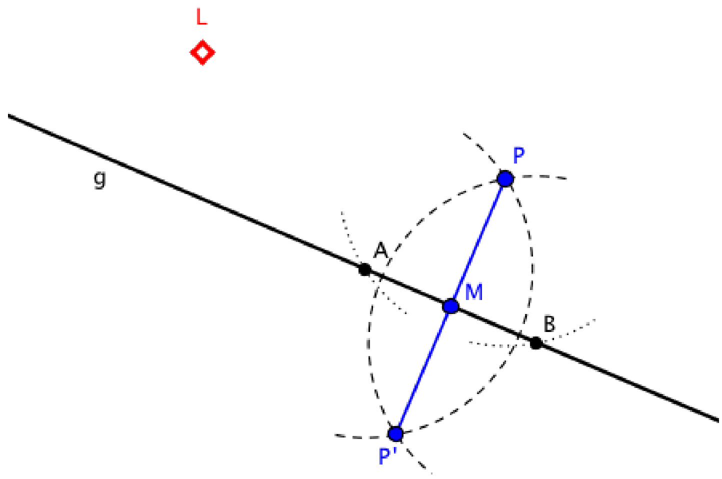


Abbildung 1.13: Zwischengrafik 2: Reflexion Lichtstrahl

Der Punkt P' ist so konstruiert worden, dass die Gerade g die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PP'}$ ist. D.h. wo auch immer der gesuchte Punkt S auf der Geraden g liegen mag, er hat auf alle Fälle von P und P' den gleichen Abstand. Nun verbinden wir die Punkte L und P' durch eine schwarz gestrichelte Linie, die die Gerade g im Punkt S schneidet.

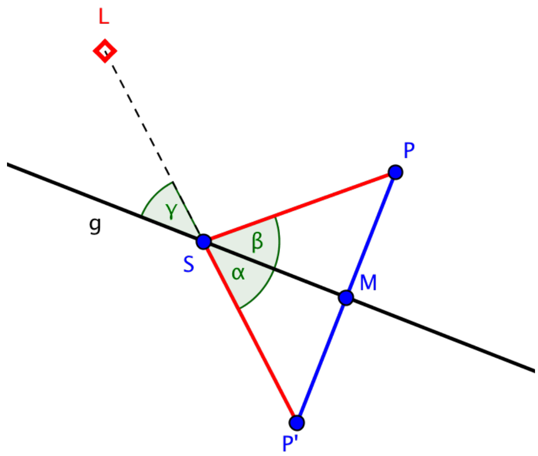


Abbildung 1.14: Reflexion Lichtstrahl: Eingangswinkel = Ausgangswinkel

Die Dreiecke SPM und $SP'M$ haben die Seite $\overline{MS}$ gemeinsam, ferner ist $\overline{PM}$ gleich $\overline{P'M}$ und für die dazwischen liegenden Winkel gilt

$$\angle PMS = 90^\circ = \angle SMP'.$$

D.h. die beiden Dreiecke sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, damit sind auch die Winkel zwischen g und $\overline{SP}$ $(= \beta)$ und zwischen g und $\overline{SP'}$ $(= \alpha)$ gleich. Da der Eingangswinkel γ der Scheitelwinkel zu α ist, gilt

$$\gamma = \alpha.$$

Der Winkel β ist der Ausgangswinkel, d.h. es gilt auch

$$\gamma = \beta.$$

Damit ist gezeigt, dass der Punkt S auf der Geraden g so konstruiert wurde, dass Eingangswinkel = Ausgangswinkel ist.

1.2.2 Axiale Symmetrie

Definition 1.18.
Geometrische Figuren, die in einer Ebene liegen und durch eine Spiegelung an einer Geraden g auf sich selbst abgebildet werden, heißen **achsensymmetrisch bezogen auf** g. Die Gerade g nennt man **Symmetrieachse**. Die einfachste achsensymmetrische Figur sind zwei Punkte, die den gleichen Abstand zur Symmetrieachse haben und deren Verbindungsstrecke mit der Symmetrieachse einen rechten Winkel bildet. Hat man mehrere solcher Punktepaare vorliegen, so bilden die Punktepaare eine achsensymmetrische Figur, deren eine Hälfte durch Spiegelung an der Symmetrieachse entstanden sein könnte. Die nachfolgende Abbildung illustriert diese Definitionen.

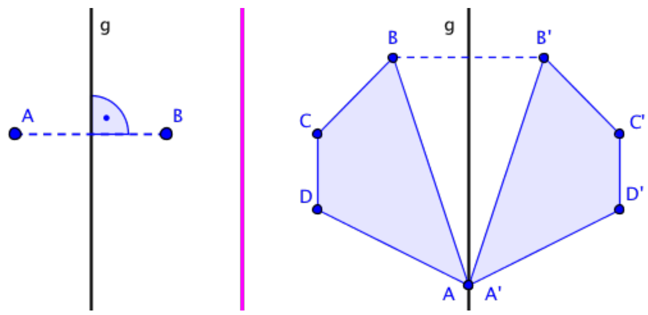


Abbildung 1.15: Achsensymmetrische Figuren

In der Grafik sind zwei durch die violette Linie getrennte achsensymmetrische Figuren dargestellt. Auf der linken Seite sind das die zwei Punkte A und B, die von der schwarzen Geraden g den gleichen Abstand haben und deren blau gestrichelte Verbindungslinie auf der Geraden g senkrecht steht. Die rechte Figur besteht aus zwei Vierecken $ABCD$ und A', B', C', D', die achsensymmetrisch zur schwarzen Geraden g liegen. Man kann sich vorstellen, dass das Viereck $A'B'C'D'$ durch Spiegelung an g aus dem Viereck $ABCD$ entstanden ist. In achsensymmetrischen Figuren stimmen Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen, mit ihren Spiegelpunkten überein, wie die Punkte A und A' in der rechten Figur.

Ein charakteristisches Merkmal der Teile achsensymmetrischer Figuren ist ihre unterschiedliche **Orientierung**. Damit ist gemeint, dass sich der Umlaufsinn des einen Teils vom anderen unterscheidet. Geht man im linken Viereck von A gegen den Uhrzeigersinn nach B und dann nach C und D, so muss man, wenn man im rechten Viereck das gleiche tun will, mit dem Uhrzeigersinn von A' nach B' usw. laufen.

Symmetrieachsen einfacher Figuren

Beispiel 1.19. Mittelsenkrechte
Die Symmetrieachse s einer Strecke $\overline{AB}$ ist die Gerade, die senkrecht auf der Strecke steht und durch ihren Mittelpunkt M verläuft. Sie wird **Mittelsenkrechte** genannt und mit Zirkel und Lineal folgendermaßen konstruiert. Um die Endpunkte A und B der Strecke werden mit *demselben* Radius, der größer als die Hälfte der Strecke $\overline{AB}$ sein muss, Kreisbögen beschrieben. Diese schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2. Die Verbindungslinie der beiden Punkte ist die Mittelsenkrechte.

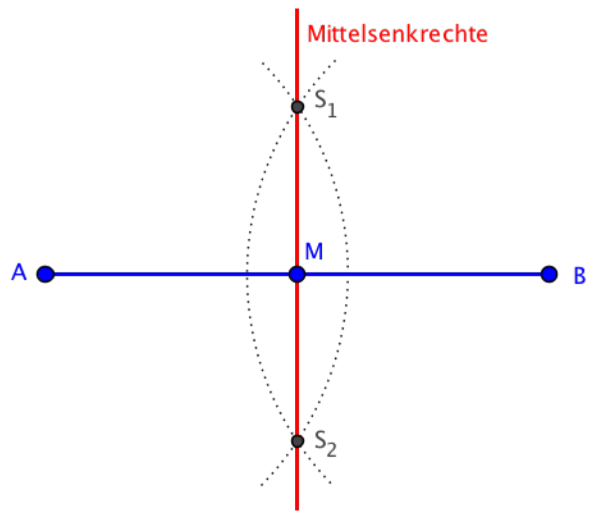


Abbildung 1.16: Mittelsenkrechte

Die Mittelpunkte *aller* Kreise, die durch die beiden Punkte A und B gehen, liegen auf der Mittelsenkrechten. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten liefert gleichzeitig auch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$, der der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Strecke ist.

Beispiel 1.20. Winkelhalbierende
Die Symmetrieachse eines Winkels ist die **Winkelhalbierende**. Sie wird konstruiert, indem man um den Scheitel S des Winkels $\angle(a, b)$ einen Kreisbogen mit beliebigem Radius zeichnet, der die Schenkel in den Punkten A und B schneidet. Man errichtet dann

die Mittelsenkrechte der (gestrichelten) Strecke $\overline{AB}$. Sie ist die Winkelhalbierende, läuft durch den Scheitelpunkt S und teilt den Winkel α in zwei gleichgroße Stücke .

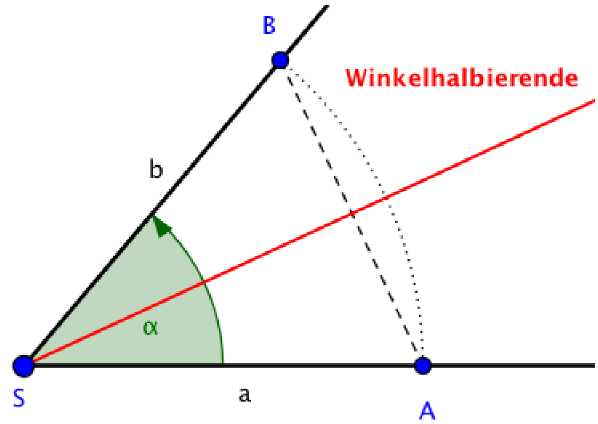


Abbildung 1.17: Winkelhalbierende

Auf der Winkelhalbierenden liegen die Mittelpunkte *aller* Kreise, die die beiden Schenkel a und b berühren. Aus der Konstruktion folgt auch, dass das Dreieck SAB gleichschenklig ist. Die Winkelhalbierende halbiert die Seite $\overline{AB}$, sie ist die Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks.

Beispiel 1.21. Mittelparallele
Die Symmetrieachse zweier paralleler Geraden g und g' ist die **Mittelparallele**. Diese wird konstruiert, indem man zunächst in einem beliebigen Punkt P auf der Geraden g die Senkrechte errichtet. Dazu beschreibt man um P einen Kreis mit beliebigem Radius, der die Gerade g in zwei Punkten A und B schneidet. Die (gestrichelte) Senkrechte in P ist dann die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Diese Mittelsenkrechte schneidet die Gerade g' im Punkt P'. Die gesuchte Mittelparallele ist dann die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PP'}$.180

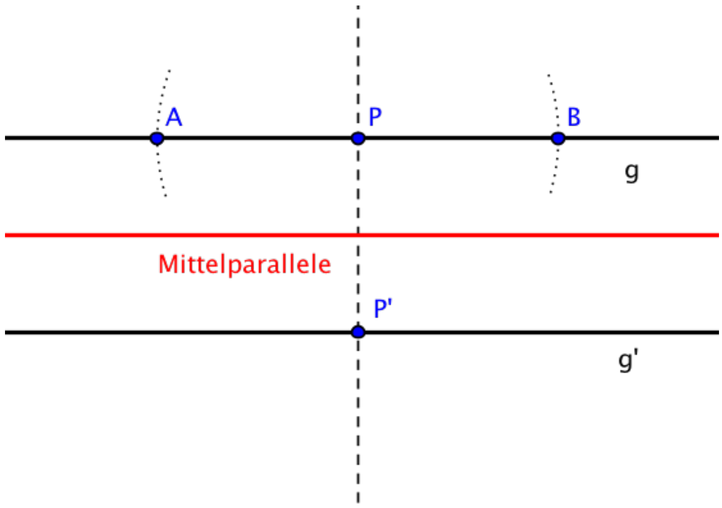


Abbildung 1.18: Mittelparallele

1.2.3 Zentrale Symmetrie

Definition 1.22.
Geometrische Figuren, die in einer Ebene liegen und nach einer Drehung um 180° um einen festen Punkt P auf sich selbst abgebildet werden, heißen **zentralsymmetrisch bezogen auf** P. Den Punkt P nennt man **Symmetriezentrum**. Die einfachste zentralsymmetrische Figur sind zwei Punkte, die den gleichen Abstand zum Symmetriezentrum haben und deren Verbindungsstrecke durch diesen Punkt hindurchgeht. Hat man mehrere solcher Punktepaare vorliegen, so bilden die Punktepaare eine zentralsymmetrische Figur, deren eine Hälfte durch Drehung um das Symmetriezentrum entstanden sein könnte. Die nachfolgende Abbildung illustriert diese Definitionen.

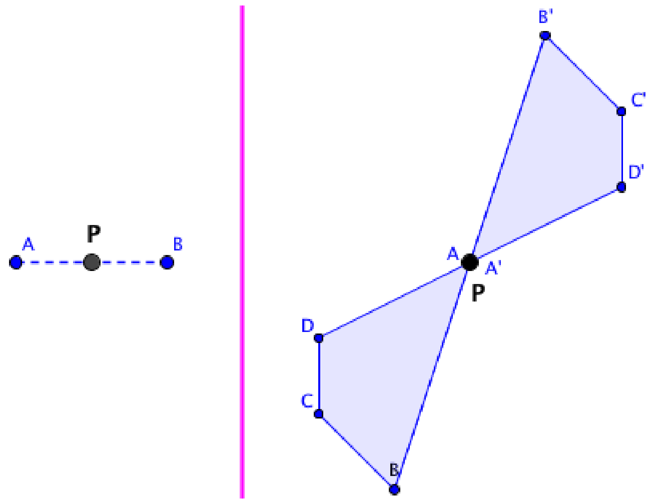


Abbildung 1.19: Zentralsymmetrische Figuren

In der Grafik sind zwei durch die violette Linie getrennte zentralsymmetrische Figuren dargestellt. Auf der linken Seite sind das die zwei Punkte A und B, die von dem schwarzen Punkt P den gleichen Abstand haben und deren blau gestrichelte Verbindungslinie durch den Punkt P verläuft. Die rechte Figur besteht aus zwei Vierecken $ABCD$ und A', B', C', D', die zentralsymmetrisch zum schwarzen Punkt P liegen. Man kann sich vorstellen, dass das Viereck $A'B'C'D'$ durch Drehung um P aus dem Viereck $ABCD$ entstanden ist. In zentralsymmetrischen Figuren stimmen Punkte, die in dem Symmetriezentrum liegen, mit ihren Drehpunkten überein, wie die Punkte A und A' in der rechten Figur.
Zentralsymmetrische Figuren haben gleiche Orientierung: geht man im linken Viereck von A mit den Uhrzeigersinn nach B und dann nach C und D, so muss man, wenn man im rechten Viereck das gleiche tun will, ebenfalls mit dem Uhrzeigersinn von A' nach B' usw. laufen.

Beispiel 1.23. Zentrale Symmetrie

1. Bei einem Viereck liegt zentrale Symmetrie genau dann vor, wenn es sich um ein Parallelogramm handelt. Das Symmetriezentrum ist der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Als Sonderfälle des Parallelogramms sind auch Rechteck, Raute und Quadrat punktsymmetrisch.
2. Jeder Kreis ist zentralsymmetrisch bezüglich seines Mittelpunkts.
3. Zwei Kreise mit gleichem Radius sind zueinander zentralsymmetrisch. Das Symmetriezentrum ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Kreismittelpunkten.
4. Mehrere Symmetriezentren kann es nur geben, wenn die Figur nicht beschränkt ist. Das einfachste Beispiel ist die Gerade. Jeder Punkt der Geraden ist ein Symmetriezentrum, d.h. eine Gerade hat sogar unendlich viele Symmetriezentren.

5. Ein Dreieck ist niemals zentralsymmetrisch.

Aufgaben zu Abschnitt 1.2

1. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Mitte der Strecke $\overline{AB}$.

2. Halbieren sie einen Winkel, indem Sie mit Zirkel und Lineal die Winkelhalbierende konstruieren.

3. Errichten Sie mit Zirkel und Lineal die Senkrechte auf einer Geraden g in einem Punkt P der Geraden.

4. Fällen Sie mit Zirkel und Lineal von einem Punkt P außerhalb einer Geraden g das Lot auf g.

5. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal zu einer Geraden g eine Parallele durch einen nicht auf der Geraden g gelegenen Punkt P.

1.3 Streckung und Ähnlichkeit

1.3.1 Streckung

Definition 1.24.
Eine **zentrische Streckung** mit dem **Streckfaktor** k ist eine geometrische Abbildung, die einen beliebigen Punkt P von einem festen **Streckzentrumspunkt** Z auf einen Punkt P' abbildet, wobei die drei Punkte Z, P, P' auf einer Geraden liegen und zudem die Gleichung

$$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$$

erfüllt ist. Dabei ist k eine beliebige, von Null verschiedene Zahl. Die folgende Grafik enthält einige Beispiele von Streckungen.

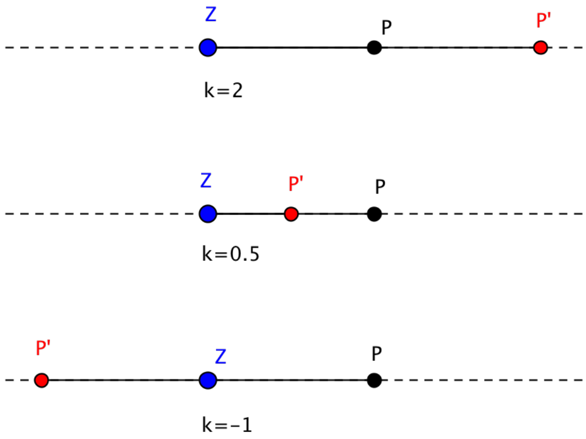


Abbildung 1.20: Zentrische Streckung eines Punktes

- Ist $k > 1$, so ist die Strecke $\overline{ZP'}$ größer als $\overline{ZP}$, es liegt eine **Vergrößerung** vor.
- Für $0 < k < 1$ nennt man die Streckung eine **Verkleinerung**.
- Ist k negativ, so liegt das Streckzentrum Z zwischen P und P'.
- Ist $k = -1$, so nennt man die Streckung auch **Punktspiegelung** an Z. Die Punktspiegelung entspricht einer Drehung von P um Z um $180°$. Die beiden Punkte P und P' bilden dann eine zentralsymmetrische Figur mit Symmetriezentrum Z.

Satz 1.25. ***Zentrische Streckung***

1. *Wird eine Strecke $\overline{AB}$ zentrisch gestreckt, so ist die Bildstrecke $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ und es gilt*
$$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}.$$
2. *Bei einer zentrischen Streckung bleiben Winkel zwischen zwei Geraden erhalten.*

Wir zeigen diese wichtigen Eigenschaften anhand eines Dreiecks in der folgenden Grafik.

Beispiel 1.26. **Zentrische Streckung eines Dreiecks**

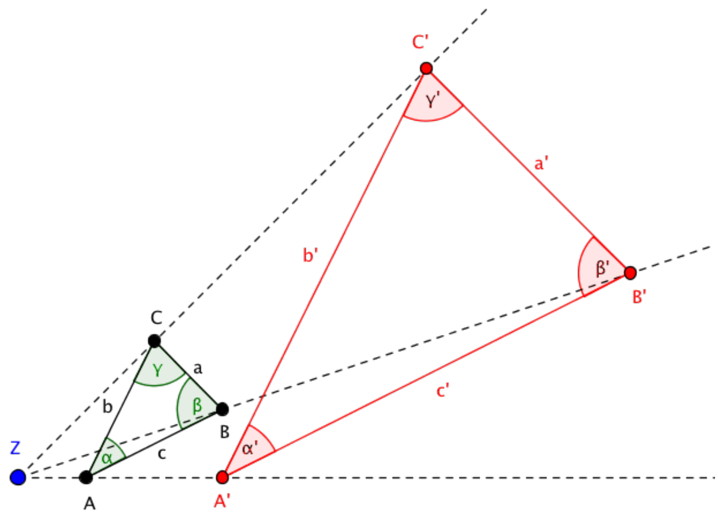


Abbildung 1.21: Streckung eines Dreiecks mit Faktor $k = 3$

1. Die Seiten des Dreiecks ABC sind parallel zu den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$, d.h. es gilt
$$a \parallel a' \ , \ b \parallel b' \ , \ c \parallel c'.$$

2. Die Seitenlängen erfüllen
$$\begin{aligned}\overline{A'B'} &= 3 \cdot \overline{AB}\\ \overline{A'C'} &= 3 \cdot \overline{AC}\\ \overline{B'C'} &= 3 \cdot \overline{BC}\end{aligned}$$
und damit folgt auch
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = 3,$$
d.h. die Verhältnisse der ungestreckten und gestreckten Seiten des Dreiecks sind gleich dem Streckfaktor.

3. Die Winkel stimmen überein
$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha'\\ \beta &= \beta'\\ \gamma &= \gamma'.\end{aligned}$$

Dreiecke, die die Eigenschaften 2. und 3. haben nennt man **ähnlich**.

1.3.2 Ähnlichkeit

Der Begriff **Ähnlichkeit** von geradlinig begrenzten geometrischen Figuren spielt in der Elementargeometrie eine große Rolle. Da man eine solche Figur immer in Dreiecke zerlegen kann, führen wir hier nur die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke auf. Diese Sätze beinhalten als Spezialfall die **Kongruenzsätze für Dreiecke**, die wir im vorhergehenden Abschnitt ausführlich behandeln haben.

Definition 1.27. Ähnlichkeit von Dreiecken
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn ihre Winkel übereinstimmen und die einander entsprechenden Seiten im gleichen Verhältnis stehen. Bezeichnen a, b, c die Seiten der ersten und a', b', c' die Seiten des zweiten Dreiecks, so soll also gelten

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Wir haben im letzten Beispiel gesehen, dass bei zentrischen Streckungen ähnliche Dreiecke entstehen und das **Ähnlichkeitsverhältnis** $\frac{a}{a'}$ dem Streckfaktor entspricht. Ähnliche Dreiecks haben die gleiche Gestalt, sind aber in der Regel unterschiedlich groß und haben unterschiedliche Flächeninhalte.

Es stellt sich die Frage, ob man zur Feststellung von Ähnlichkeit zwischen zwei Dreiecken immer *alle* Winkel und *alle* Seitenverhältnisse untersuchen muss. Der folgende Satz besagt, dass das nicht notwendig ist.

Satz 1.28. ***Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken***
Zwei Dreiecke sind ***ähnlich****, wenn sie*

1. im Verhältnis der drei Seiten übereinstimmen **(SSS) oder**
2. im Verhältnis zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(SWS) oder**
3. im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel übereinstimmen **(SsW) oder**
4. in zwei Winkeln übereinstimmen **(WW)**.

Beispiel 1.29. Ähnlichkeit spezieller Dreiecke

1. Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich **(SSS)**.
2. Alle gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich **(SWS)**.
3. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn
   a) sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen **(WW) oder**
   b) die Verhältnisse der jeweiligen Katheten gleich sind **(SWS) oder**

c) die Verhältnisse der entsprechenden Katheten zu den Hypotenusen gleich sind **(SsW)**.

4. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn

   a) die Verhältnisse Schenkel zur Basis gleich sind **(SSS) oder**

   b) sie in dem von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(SWS)**.

1.3.3 Strahlensätze

Eine wichtige Anwendungsmöglichkeit der Ähnlichkeit von Dreiecken sind die **Strahlensätze**. Die Strahlensätze machen Aussagen über die Verhältnisse von Strecken. Das Verhältnis von zwei Strecken kann durch ihre Längen ausgedrückt werden. Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ $2\,cm$ und $6\,cm$ lang, so wird ihr Verhältnis durch

$$\overline{AB} : \overline{CD} = 2\,cm : 6\,cm = 1 : 3$$

berechnet. Die Strahlensätze ergeben sich als Spezialfall der Ähnlichkeit, wenn ein **Zweistrahl** (das sind zwei Strahlen mit gleichem Scheitelpunkt und gleicher Richtung) von zwei parallelen Geraden geschnitten wird. Schauen wir uns diese Situation in der nachfolgenden Grafik an.

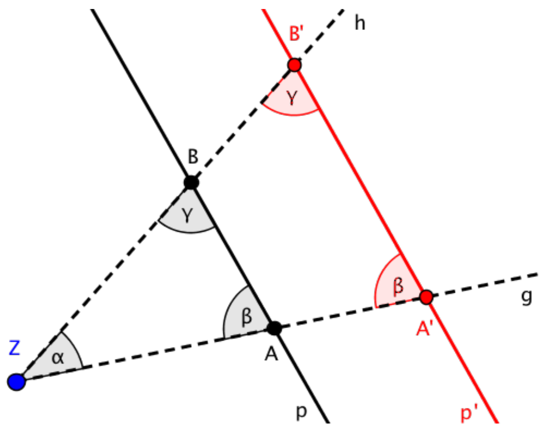


Abbildung 1.22: Strahlensätze

Die beiden schwarz gestrichelten Strahlen g und h haben den gemeinsamen Scheitelpunkt Z. Die beiden Parallelen sind die schwarze Gerade p und die rote Gerade p'. Die beiden Dreiecke ZAB und $ZA'B'$ sind ähnlich, da sie in allen Winkeln übereinstimmen. Also sind die Verhältnisse der Seiten gleich, d.h. es gilt

$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}.$$

Dieses Ergebnis wird in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 1.30. ***Strahlensätze***

1. **Strahlensatz**: Werden die Strahlen eines Zweistrahls von Parallelen geschnitten, so sind die Verhältnisse der entsprechenden Strahlenabschnitte gleich. Mit den obigen Bezeichnungen gilt
$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'}.$$

   Es gilt auch die **Umkehrung des 1. Strahlensatzes** : Sind die Verhältnisse der entsprechenden Strahlenabschnitte gleich, so sind die Geraden durch die Teilungspunkte der Strahlen parallel. Gilt mit den obigen Bezeichnungen die Beziehung
$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'}$$
   zwischen den Abschnitten auf zwei Strahlen, so sind die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ parallel.

2. **Strahlensatz**: Werden die Strahlen eines Zweistrahls von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die Abschnitte auf den Strahlen. Mit den obigen Bezeichnungen gilt
$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'}.$$

Die Strahlensätze werden häufig im *Vermessungswesen* angewendet. Wir schauen uns zwei Beispiele an. Als erstes wollen wir die Höhe eines Turms, den man nicht hochsteigen kann, messen.

Beispiel 1.31. Höhenmessung eines Turmes
Die folgende Skizze zeigt die Aufgabenstellung.

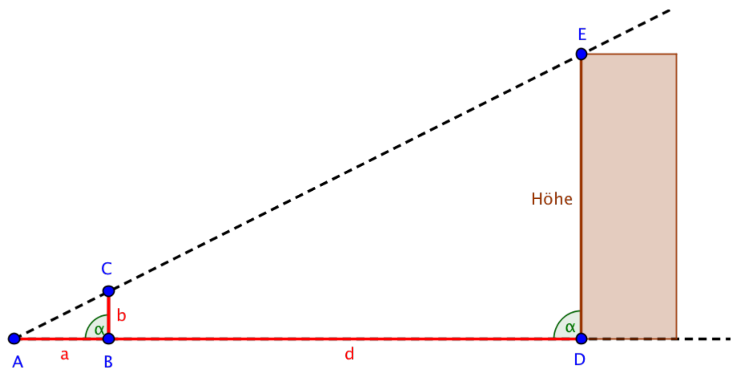


Abbildung 1.23: Höhenmessung eines rechteckigen Turms

Um die Höhe zu ermitteln wählen wir uns einen Punkt A und zeichnen von A ausgehend zwei Strahlen (in der Abbildung gestrichelt), die einmal durch den Fusspunkt D des Turmes sowie durch den Dachpunkt E gehen. Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{DE}$, die in der Grafik mit „Höhe" gekennzeichnet ist. Nun nehmen wir einen Stab der Länge b und stellen ihn so auf, dass das eine Ende den Strahl durch A und D im Punkt B und das andere Ende den Strahl durch A und E im Punkt C berührt, und dass gleichzeitig der Winkel α der gleiche ist wie der zwischen d und der $Höhe$. Dann messen wir die Abstände a zwischen den Punkten A und B und d zwischen B und D, die in der Grafik rot gezeichnet sind. Damit haben wir alle Hilfsgrößen bestimmt, die zur Ermittlung der Höhe notwendig sind. Da die beiden Strecken $Höhe$ und b parallel sind, wenden den zweiten Strahlensatz an und erhalten

$$Höhe : b = (a + d) : a,$$

d.h.

$$Höhe = \frac{(a + d)}{a} b.$$

Wir rechnen ein Zahlenbeispiel dazu. Seien

$$b = 2\,m, a = 4\,m, d = 20\,m,$$

dann folgt:

$$Höhe = \frac{(4 + 20)}{4} \cdot 1 = 6\,m.$$

Im zweiten Beispiel berechnen wir die Breite eines Flusses.

Beispiel 1.32. Breitenmessung eines Flusses

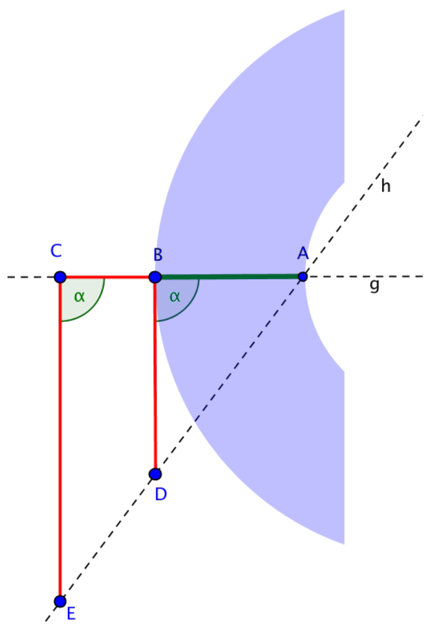


Abbildung 1.24: Breitenmessung eines Flusses

In der Grafik ist ein blauer Flussabschnitt eingezeichnet, dessen Breite (grüne Strecke) zwischen den Punkten A und B berechnet werden soll. Wir legen eine Gerade g durch die Punkte A und B und markieren auf g einen Punkt C. In B errichten wir die Senkrechte auf der Geraden g und markieren auf dieser Senkrechten einen Punkt D. Nun zeichnen wir eine Gerade h durch A und D und konstruieren die Senkrechte im Punkt C auf der Geraden g. Diese schneidet die Gerade h im Punkt E. Da die beiden Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ parallel sind, haben wir durch diese Konstruktion eine Situation geschaffen, in der wir den zweiten Strahlensatz anwenden können. Es gilt

$$\overline{BD} : \overline{CE} = \overline{AB} : \overline{AC}.$$

Die Strecke $\overline{AC}$ können wir darstellen als

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

und erhalten

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{BC}}.$$

Diese Gleichung stellen wir nach der gesuchten Größe $\overline{AB}$ um. Zunächst folgt

$$\overline{BD}\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = \overline{AB} \cdot \overline{CE}$$

und daraus

$$\overline{BD} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CE} - \overline{BD} \cdot \overline{AB},$$

also

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{BC}}{\overline{CE} - \overline{BD}}.$$

Wir rechnen ein konkretes Zahlenbeispiel aus. Seinen $\overline{BD} = 10\,m, \overline{BC} = 5\,m, \overline{CE} = 15\,m$, dann folgt

$$\overline{AB} = \frac{10 \cdot 5}{15 - 10} = 10\,m.$$

Das nächste Beispiel ist ein wichtiges Ergebnis der Dreiecks-Geometrie.

Beispiel 1.33. Seitenmittendreieck
In einem Dreieck ABC seien die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, mit A_m, B_m, C_m bezeichnet. Dann sind die Seiten des Dreiecks A_m, B_m, C_m parallel zu denen im Dreieck ABC.

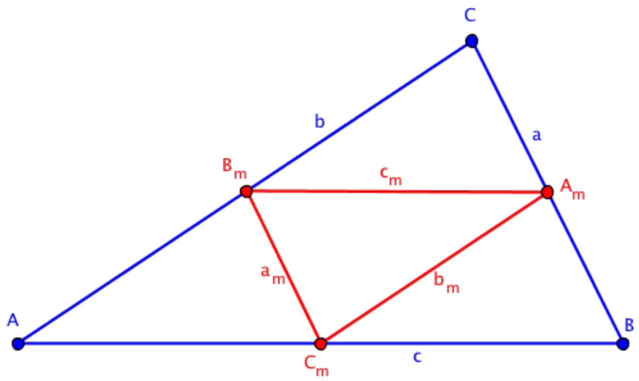


Abbildung 1.25: Seitenmittendreieck $A_mB_mC_m$

Es gilt also

$$a_m \parallel a \ , \ b_m \parallel b \ , \ c_m \parallel c,$$

was direkt aus der Umkehrung des ersten Strahlensatzes folgt, da die Verhältnisse

$$\begin{aligned} \overline{AB_m} : \overline{AC} &= 1:2 = \overline{AC_m} : \overline{AB} \\ \overline{BC_m} : \overline{BA} &= 1:2 = \overline{BA_m} : \overline{BC} \\ \overline{CB_m} : \overline{CA} &= 1:2 = \overline{CA_m} : \overline{CB}, \end{aligned}$$

also jeweils konstant sind.

Aufgaben zu Abschnitt 1.3

1. Teilen Sie mit Zirkel und Lineal eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ in sechs gleich große Teile.

2. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal das Dreieck mit den gegebenen Seiten $a = 3\,cm, b = 4\,cm, c = 5\,cm$ (SSS).

3. Konstruieren Sie das Dreieck mit den gegebenen Seiten $a = 5\,cm, c = 8\,cm$ und dem gegebenen Winkel $\gamma = 80°$ (SsW).

4. Konstruieren Sie das Dreieck mit $c = 7\,cm, \alpha = 30°$ und $\beta = 60°$.

5. In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$. Gegeben sind $\overline{AB} = 5, \overline{CD} = 7, \overline{BC} = 12$. Berechnen Sie die Strecke $\overline{SC}$.

6. Zu drei gegebenen Strecken a, b, c ist die Strecke x so mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, dass $a : b = c : x$ erfüllt ist.

7. Teilen Sie eine Strecke von $12\,cm$ zeichnerisch im Verhältnis $4 : 5$.

8. Die Steigung eines Schienenstranges ist auf einer Länge von $1450\,m$ mit $1:50$ angegeben. Um wie viel Meter höher liegt der Endpunkt der Strecke gegenüber dem Anfangspunkt?

9. Welche Höhe hat ein Turm, dessen Schatten $4\,m$ lang ist, wenn ein senkrecht daneben aufgestellter Stab der Höhe $1,5\,m$ einen Schatten von $80\,cm$ wirft?

1.4 Dreiecksgeometrie

In diesem Abschnitt leiten wir eine Reihe von geometrischen Eigenschaften für Dreiecke her und starten mit einer Definition der verschiedenen Formen von Dreiecken.

1.4.1 Dreiecksformen

Definition 1.34. Dreieck
Durch drei voneinander verschiedene Punkte A, B, C der Ebene, die nicht alle auf einer Geraden liegen, lassen sich genau drei Strecken legen, die jeweils zwei Punkte verbinden. Die so geschlossene Figur in der Ebene nennen wir das **Dreieck** ABC. Für die Seiten a, b, c des Dreiecks wird festgelegt:

$$\begin{aligned} a &= \overline{BC} \\ b &= \overline{AC} \\ c &= \overline{AB}. \end{aligned}$$

Die **Winkel des Dreiecks** werden folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle(c, b) \\ \beta &= \angle(a, c) \\ \gamma &= \angle(b, a)\,. \end{aligned}$$

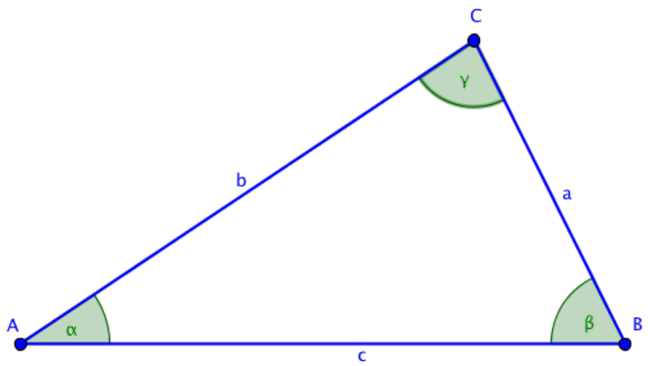


Abbildung 1.26: Dreieck

- Im **spitzwinkeligen** Dreieck sind alle Winkel spitz.
- Im **rechtwinkligen** Dreieck ist einer der Winkel genau 90°. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite wird **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten werden **Katheten** genannt.
- Im **stumpfwinkligen** Dreieck ist ein Winkel größer als 90°.
- Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten, die sogenannten **Schenkel**, gleich lang sind. Die dritte Seite wird **Basis** genannt.
- Im **gleichseitigen** Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang und alle Winkel 60°.

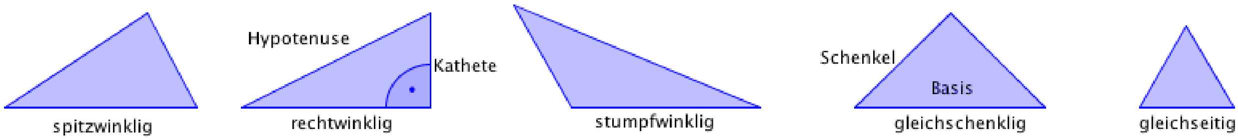


Abbildung 1.27: Formen der Dreiecke

Satz 1.35. ***Dreiecksungleichung***
In einem beliebigen Eckpunkt eines Dreiecks kann man längs der Seiten des Dreiecks zu einem anderen Eckpunkt gelangen und zwar entlang der verbindenden Seite oder entlang der beiden anderen Seiten. Da die Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} c &< a+b \\ b &< a+c \\ a &< b+c. \end{aligned}$$

Das heißt:
In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.

Wenn wir uns die beiden letzten Ungleichungen hernehmen, so folgt durch Subtraktion von a bzw. b

$$\begin{aligned} b-a &< c \\ a-b &< c, \end{aligned}$$

und damit

$$|a-b| < c,$$

d.h. die Differenz der beiden Seiten a und b ist kleiner als die Seite c. Da diese Aussage gleichermaßen für alle Seiten gilt, erhalten wir:
In einem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten stets kleiner als die dritte Seite.

1.4.2 Transversalen und deren Schnittpunkte

Unter einer **Transversalen** versteht man allgemein eine beliebige Gerade, die das Dreieck schneidet. Im engeren Sinne versteht man darunter die **Mittelsenkrechten**, die **Höhen**, die **Seitenhalbierenden** und die **Winkelhalbierenden** in einem Dreieck.

Mittelsenkrechten im Dreieck

Da ein Dreieck aus drei Seiten aufgebaut ist, kann man auf jeder Seite die Mittelsenkrechte errichten. Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten der Seite c sind von den Endpunkten A und B gleichweit entfernt. Das gleiche gilt für die Seite b: Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten der Seite b sind von den Punkten A und C gleichweit entfernt. D. h. der Schnittpunkt M der beiden Mittelsenkrechten ist von allen drei Eckpunkten A, B, C des Dreiecks gleichweit entfernt. Daraus leitet sich folgende Aussage ab.

Satz 1.36. ***Mittelsenkrechten im Dreieck***
Die drei Mittelsenkrechten der Seiten in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt M. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des ***Umkreises*** *mit dem Radius*

$$r = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}.$$

Bei spitzwinkligen Dreiecken liegt der Mittelpunkt M innerhalb des Dreiecks,

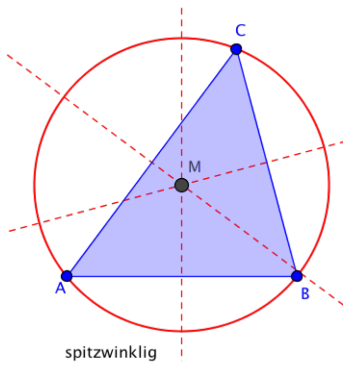


Abbildung 1.28: Mittelsenkrechten im spitzwinkligen Dreieck

bei stumpfwinkligen Dreiecken außerhalb des Dreiecks

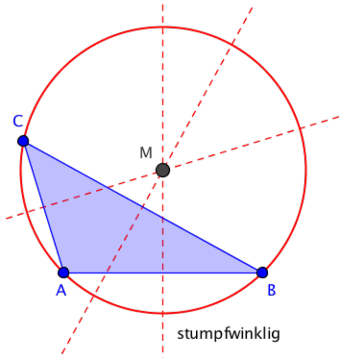


Abbildung 1.29: Mittelsenkrechten im stumpfwinkligen Dreieck

und bei rechtwinkligen Dreiecken auf der Hypotenuse.
Den letzten Sachverhalt nennt man auch ***Satz des Thales****. Dieser Satz wird oftmals folgendermaßen formuliert: „Jedem rechtwinkligem Dreieck kann ein Kreis umschrieben werden, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Hypotenuse ist".*

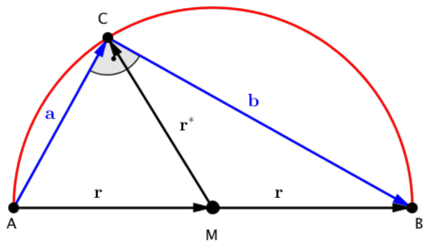


Abbildung 1.30: Mittelsenkrechten im rechtwinkligen Dreieck

In der Grafik kann man den Punkt C beliebig auf der roten Kreislinie wählen, das dann jeweils neu entstehende Dreieck ist wieder rechtwinklig mit dem rechten Winkel $\angle ACB$. Aufgrund dieser Eigenschaft wird der Satz des Thales oftmals auch kurz als „Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter" wiedergegeben.

Beispiel 1.37. Mittelsenkrechten im gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieck
Wir konstruieren die Mittelsenkrechten und Umkreise in folgenden Dreiecken:

1. Gleichschenklig: $a = b = 3\,cm, \gamma = 90°$

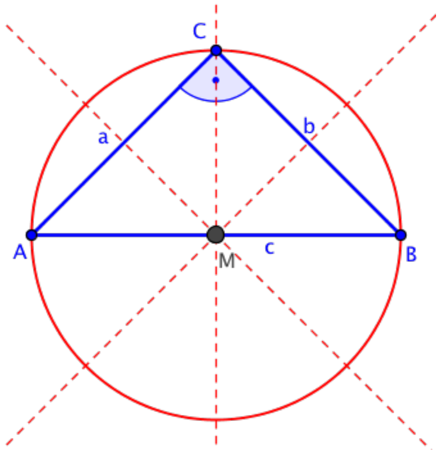


Abbildung 1.31: Mittelsenkrechten im gleichschenkligen Dreieck

Die rot gestrichelten Mittelsenkrechten des blauen Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt M, der Mittelpunkt des roten Umkreises ist. Da das Dreieck nicht nur gleichschenklig sondern auch rechtwinklig ist, ist der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten gleichzeitig der Mittelpunkt der Hypotenuse. Die Mittelsenkrechte durch die Basis c ist die (einzige) Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks.

2. Gleichseitig:

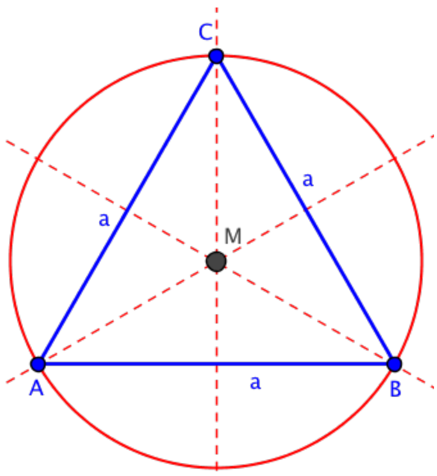


Abbildung 1.32: Mittelsenkrechten im gleichseitigen Dreieck

Die rot gestrichelten Mittelsenkrechten des blauen Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt M, der Mittelpunkt des roten Umkreises ist. Alle drei Mittelsenkrechten sind auch Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks.

Höhen im Dreieck

Definition 1.38.
Beschreibt man ein Seitenmittendreieck $A_mB_mC_m$ in ein bestehendes Dreieck ABC, so sind nach Beispiel 1.33 die Seiten des Seitenmittendreiecks parallel zu den Seiten des Dreiecks ABC. Die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC stehen also auch senkrecht auf den Seiten des Seitenmittendreiecks und verlaufen durch die Endpunkte A_m, B_m, C_m, sie sind die **Höhen** des Seitenmittendreiecks. Die nachfolgende Abbildung verdeutlich diesen Sachverhalt.

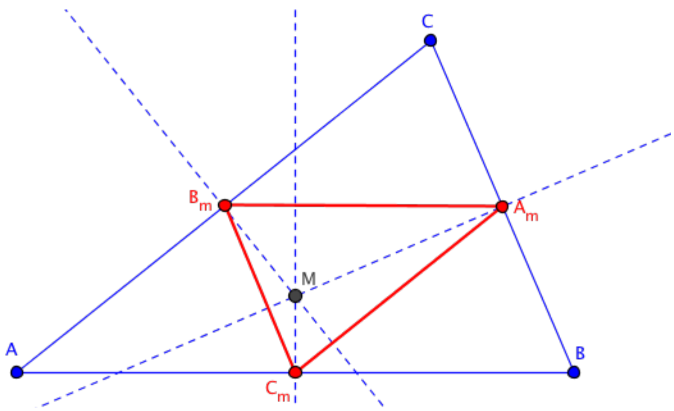


Abbildung 1.33: Höhen im Seitenmittendreieck

Die gestrichelten blauen Linien sind also die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC und *gleichzeitig* die Höhen im Dreieck $A_mB_mC_m$.

Wir erhalten folgendes Resultat.

Satz 1.39. ***Höhen im Dreieck***
Steht eine Gerade auf einer Dreiecksseite oder deren Verlängerung senkrecht und geht durch den der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt, so nennt man die Gerade ***Höhe****. Da es drei Seiten in einem Dreieck gibt, gibt es auch drei Höhen, die man üblicherweise mit h_a, h_b, h_c bezeichnet. Und da die Höhen eines Dreiecks gleichzeitig die Mittelsenkrechten desjenigen Dreiecks sind, das entsteht, wenn man durch die Eckpunkte des Dreiecks jeweils die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht, gilt auch der Satz:*
Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich stets in einem Punkt.

Beispiel 1.40. Höhen im gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieck

1. Gleichschenklig:

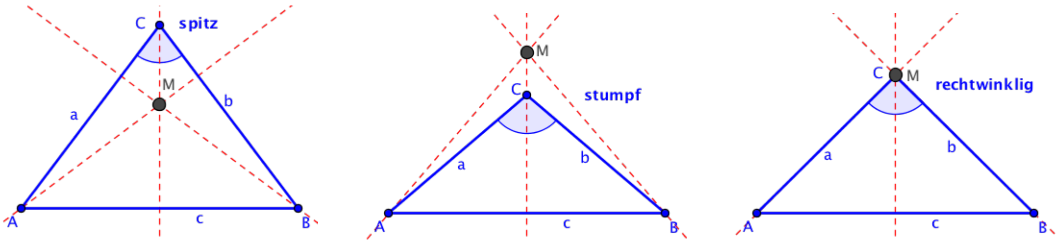


Abbildung 1.34: Höhen im gleichschenkligen Dreieck

Auch bei den Höhen ist es so, dass ihr Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks liegt, wenn alle Winkel spitz sind. Er liegt außerhalb bei stumpfwinkligen Dreiecken und fällt im rechtwinkligen Dreieck mit der der Hypotenuse gegenüberliegenden Ecke zusammen.

2. Gleichseitig: Da bei gleichseitigen Dreiecken die Mittelsenkrechten durch die gegenüberliegenden Ecken gehen, sind die Höhen und die Mittelsenkrechten identisch.

Seitenhalbierende im Dreieck

Definition 1.41.
Die **Seitenhalbierenden** eines Dreiecks ABC verbinden die Seitenmitten A_m, B_m, C_m mit den jeweils gegenüberliegenden Eckpunkten und werden mit s_a, s_b, s_c bezeichnet.

Satz 1.42. ***Seitenhalbierende im Dreieck***
*Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S, dem **Schwerpunkt** der Dreiecksfläche. Stellt man sich vor, dass das Dreieck gleichmäßig mit Masse belegt ist, so ist der Schwerpunkt die Stelle, an der man das Dreieck aufhängen kann, so dass es in der Waage bleibt. Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende vom Eckpunkt aus im Verhältnis* $2:1$.

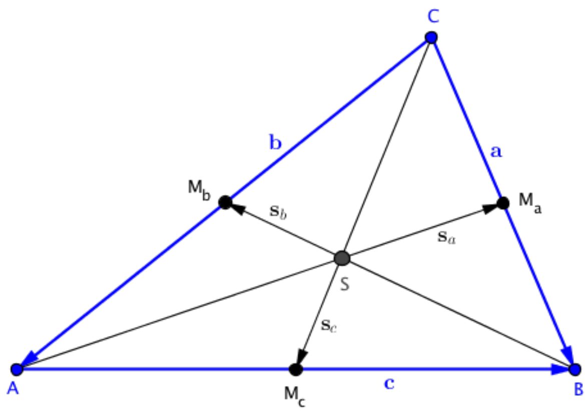


Abbildung 1.35: Seitenhalbierende im Dreieck

In der Abbildung ist die schwarz gestrichelte Hilfsstrecke $\overline{A_mB_m}$ eingezeichnet. Diese wird benötigt, um das Teilungsverhältnis von 2 : 1 zu zeigen. Zunächst gilt nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes, dass aus

$$\overline{CA} : \overline{CB_m} = \overline{CB} : \overline{CA_m} = 2 : 1$$

folgt, dass die Strecken $\overline{A_mB_m}$ und $\overline{AB}$ parallel sind und nach dem zweiten Strahlensatz ebenfalls das Verhältnis

$$\overline{AB} : \overline{A_mB_m} = 2 : 1$$

haben. Dann folgt wieder mit dem ersten Strahlensatz, dass gilt

$$\overline{AS} : \overline{SA_m} = \overline{BS} : \overline{SB_m} = \overline{AB} : \overline{A_mB_m} = 2 : 1$$

Das gleiche lässt sich analog auch für die dritte Seitenhalbierende zeigen.

Beispiel 1.43. Seitenhalbierende im gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieck

1. Gleichschenklig:

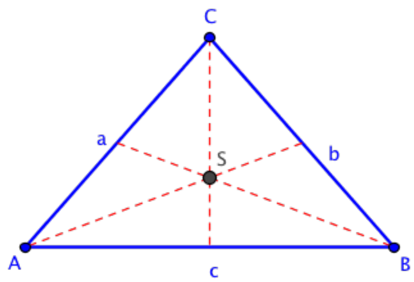


Abbildung 1.36: Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck

In einem gleichseitigen Dreieck stimmt die Seitenhalbierende der Basis c mit der Mittelsenkrechten überein. Die Mittelsenkrechte wiederum ist die Symmetrieachse des Dreiecks und wir finden in diesem Beispiel etwas, was auch bei beliebigen geometrischen Figuren gilt:
Der Schwerpunkt S liegt immer auf den Symmetrieachsen!

2. Gleichseitig: Da bei gleichseitigen Dreiecken die Mittelsenkrechten durch die gegenüberliegenden Ecken gehen, sind die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten identisch. Da in einem gleichseitigen Dreiecks alle drei Mittelsenkrechten Symmetrieachsen sind, kann man die Aussage von 1. noch weiter präzisieren:
Schneiden sich die Symmetrieachsen einer beliebigen geometrischen Figur der Ebene in einem Punkt, so ist dieser Punkt der Schwerpunkt der Figur.

Winkelhalbierende im Dreieck

Definition 1.44.
Die **Winkelhalbierenden** $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ halbieren die Winkel in einem Dreieck ABC. Der Schnittpunkt M der Winkelhalbierenden w_α und w_b hat den gleichen Abstand sowohl von den Seiten b und c (w_α) als auch von den Seiten c und a (w_β). Da er also auch von den Seiten a und b den gleichen Abstand hat, muss er auch auf der Winkelhalbierenden w_γ liegen.

Das führt zu folgender Aussage.

Satz 1.45. ***Winkelhalbierende im Dreieck***
Die drei Winkelhalbierenden der Winkel in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt M. Dieser ist der Mittelpunkt des ***Inkreises****, der jede Dreiecksseite in einem Punkt berührt. Diese drei Berührpunkte bilden das Dreieck A_i, B_i, C_i. Seine Ecken sind die Fußpunkte der von M aus gefällten Lote auf die Seiten des Dreiecks ABC. Die nachfolgende Grafik erläutert diese Zusammenhänge.*

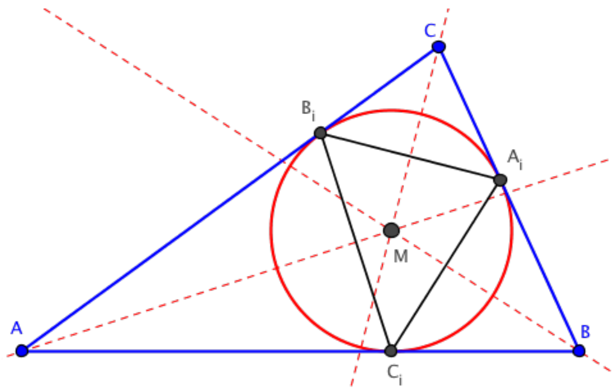


Abbildung 1.37: Winkelhalbierende im Dreieck

Die rot gestrichelten Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt M. Von M werden jeweils die Lote auf die Seiten des Dreiecks gefällt und man erhält die Lotfußpunkte A_i, B_i, C_i, die das schwarze Berührdreieck bilden. Der rote Inkreis hat dann den Mittelpunkt M und den Radius

$$r = \overline{MA_i} = \overline{MB_i} = \overline{MC_i}.$$

Beispiel 1.46. Winkelhalbierende im gleichschenkligen und gleichseitigem Dreieck

1. Gleichschenklig:

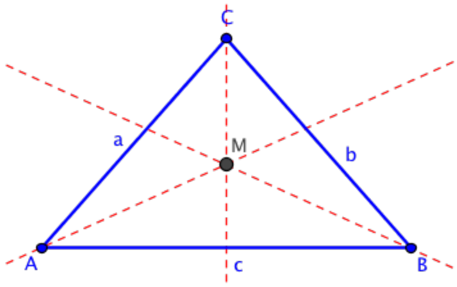


Abbildung 1.38: Winkelhalbierende im gleichseitigen Dreieck

In einem gleichschenkligen Dreieck stimmt die Winkelhalbierende des der Basis c gegenüber liegenden Winkels mit der Mittelsenkrechten der Basis überein.

2. Gleichseitig: Da bei gleichseitigen Dreiecken die drei Mittelsenkrechten die Symmetrieachsen sind, sind diese auch die Winkelhalbierenden. Wir können also feststellen: **Bei gleichseitigen Dreiecken sind die Mittelsenkrechten, Höhen, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden identisch.**

Wir zeigen an einem weiteren Beispiel, wie man durch geometrisches Argumentieren neue Einsichten gewinnen kann.

Beispiel 1.47. Teilungsverhältnis Winkelhalbierende
Wir fragen uns, wie groß in einem Dreieck ABC das Teilungsverhältnis der Strecken $\overline{AC_i}$ und $\overline{C_iB}$ ist, wenn der Punkt C_i der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von γ und der Dreiecksseite c ist. Die folgende Skizze illustriert die Aufgabenstellung.

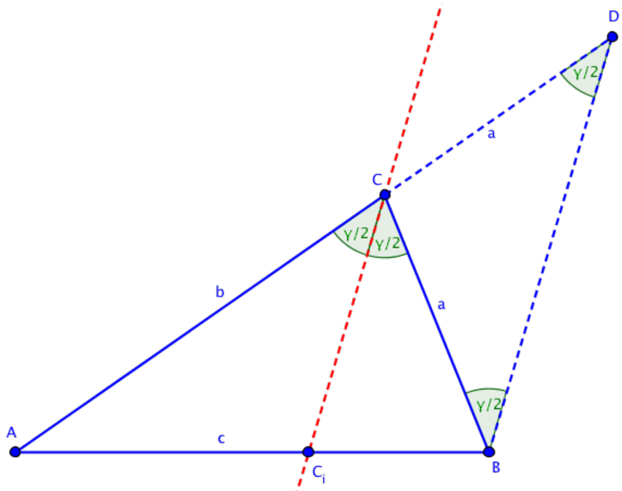


Abbildung 1.39: Seitenverhältnis bei Teilung durch Winkelhalbierende

Zur Berechnung konstruieren wir das Dreieck BCD, indem wir die rot gestrichelte Winkelhalbierende parallel verschieben, sodass der Eckpunkt B auf der Parallelen legt. Dann verlängern wir die Seite b und nennen den Schnittpunkt dieser Verlängerung mit der Parallelen D. In der Skizze ist abzulesen, dass die eingezeichneten Winkel $\angle(DBC)$ und $\angle(CDB)$, die Wechsel- bzw. Stufenwinkel sind, beide gleich $\gamma/2$ sind. D.h. das Dreieck BCD ist gleichschenklig, damit ist die Seite $\overline{CD}$ ebenfalls gleich a. Mit dem ersten Strahlensatz folgt dann

$$\overline{AC_i \colon C_iB} = b : a,$$

d.h. ***in einem Dreieck teilen die Winkelhalbierenden die gegenüberliegenden Seiten im Verhältnis der anliegenden Seiten.***

1.4.3 Flächenberechnung von Dreiecken

Um die Fläche in einem Dreieck zu ermitteln schauen wir uns zunächst an, wie die Flächen in einem Quadrat, Rechteck und Parallelogramm berechnet werden.

Satz 1.48. ***Flächeninhalte einfacher Figuren***

- **Quadrat**: Ein Quadrat mit der Seitenlänge a lässt sich durch Einheitsquadrate geeigneter Länge voll auslegen. Dabei entstehen a Streifen mit je a Einheitsquadraten, insgesamt also $a \cdot a = a^2$ Einheitsquadrate. D.h. der Flächeninhalt F eines Quadrats mit der Seitenlänge a ist

$$F = a^2.$$

- **Rechteck**: Mit ganz ähnlichen Argumenten folgt, dass der Flächeninhalt F eines Rechtecks mit den Seiten a und b gleich

$$F = a \cdot b$$

ist.

- **Parallelogramm**: Ein Parallelogramm lässt sich mit folgender Konstruktion in ein flächengleiches Rechteck verwandeln:

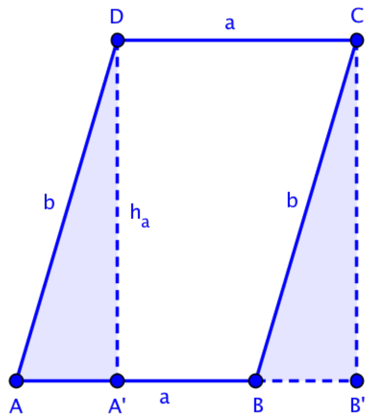


Abbildung 1.40: Flächeninhalt Parallelogramm

Aus dem Parallelogramm $ABCD$, das aus den beiden Parallelenpaaren a und b besteht, wird das rechtwinklige Dreieck $AA'D$ an der einen Seite abgetrennt und an der anderen Seite als Dreieck $BB'C$ angefügt, so dass ein flächengleiches Rechteck $A'B'CD$ entsteht. Dieses hat nach 2. den Flächeninhalt $\overline{A'B'} \cdot h_a$, wobei h_a die Höhe der Seite a bezeichnet. Da die Strecke $\overline{A'B'}$ gleich $a = \overline{AB} = \overline{DC}$ ist, gilt also: der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe, d.h.

$$F = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

- **Dreieck**: Aus jedem Dreieck kann man ein Parallelogramm mit dem doppelten Flächeninhalt generieren, was folgende Abbildung verdeutlicht.

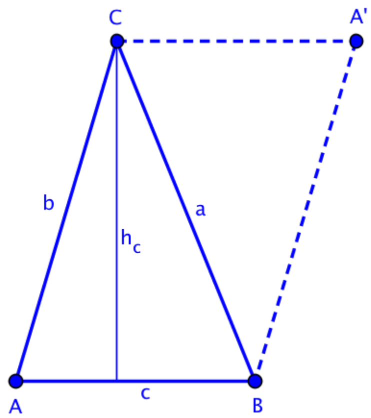


Abbildung 1.41: Flächeninhalt Dreieck

Da Seiten des gestrichelten Dreiecks $BA'C$ mit denen des ursprünglichen Dreiecks übereinstimmen, sind die Dreiecke kongruent, also flächengleich. Beide Dreiecke bilden gemeinsam ein Parallelogramm mit dem Parallelenpaaren c und b und der Höhe h_c, die auch gleichzeitig eine Höhe im Dreieck ABC ist. D.h. für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt

$$F = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a = \frac{1}{2}\, a \cdot h_b, \tag{1.2}$$

wobei h_a, h_b, h_c die Höhen im Dreieck bezeichnen.

Heronsche Formel

Zur Ermittlung der Fläche eines Dreiecks wäre es eigentlich naheliegend zu versuchen, die Fläche aus den drei Seiten zu berechnen. Eine solche Formel existiert tatsächlich, sie ist allerdings etwas unhandlich, so dass sie nur selten eingesetzt wird.

Satz 1.49. ***Formel von Heron***
Eine weitere Möglichkeit den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen bietet folgende Formel:

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

wobei

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{U}{2}$$

ist und U den ***Umfang des Dreiecks*** *bezeichnet.*

Beispiel 1.50. **Formel von Heron**
Wir stellen die Formel von Heron so um, dass wir die dritte Seite eines Dreiecks berechnen können, wenn wir die beiden anderen Seiten und den Flächeninhalt des Dreiecks kennen. Zunächst setzen wir für s die halben Summen der Seiten ein und erhalten:

$$F = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}.$$

Nun quadrieren wir die Gleichung und es ergibt sich

$$16F^2 = (a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)\,.$$

Auf der rechten Seite sortieren wir die Klammern um

$$16F^2 = ((a+b)+c)\,((a+b)-c)\,(c+(b-a))\,(c-(b-a))\,.$$

Nun wenden wir die binomischen Formeln auf die beiden ersten und beiden letzten Faktoren an und erhalten

$$16F^2 = \left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (b-a)^2\right).$$

Die inneren Klammern werden ausgerechnet

$$16F^2 = \left(a^2 + b^2 + 2ab - c^2\right)\left(c^2 - b^2 - a^2 + 2ab\right).$$

Umsortieren ergibt

$$16F^2 = \left(2ab + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right)\left(2ab - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right). \tag{1.3}$$

Erneute Anwendung der binomischen Formel liefert schließlich

$$16F^2 = 4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die dritte Seite berechnen, wenn die Fläche und die beiden anderen Seiten bekannt sind. Als Zahlenbeispiel seien folgende Größen vorgegeben:

$$a = 3\,cm, c = 5\,cm, F = 6\,cm^2$$

und gesucht ist die Seite b. Wir setzen die Zahlen in die Formel (1.3) ein und erhalten

$$16 \cdot 6^2 = 4 \cdot 3^2 b^2 - \left(3^2 + b^2 - 5^2\right)^2$$

Wir rechnen die linke und rechte Seite aus als Zwischenergebnis

$$576 = 36b^2 - \left(-16 + b^2\right)^2.$$

Weitere Klammerauflösung führt zu

$$576 = 36b^2 - \left(256 - 32b^2 + b^4\right).$$

Diese Gleichung wird umsortiert und umgestellt

$$b^4 - 68b^2 + 832 = 0.$$

Wir erhalten eine biquadratische Gleichung, die wir durch die Ersetzung $x = b^2$ zu einer quadratischen machen:

$$x^2 - 68x^2 + 832 = 0$$

und diese mit der p-q-Formel lösen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 34 + \sqrt{34^2 - 832} = 34 + 18 = 52 \\ x_2 &= 34 - 18 = 16. \end{aligned}$$

Um b zu ermitteln müssen wir aus $x_{1/2}$ die Wurzel ziehen und erhalten als Lösungen

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{52} = 4\sqrt{13} \\ b_2 &= \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

D.h. es gibt *zwei* Dreiecke, die die zwei Seiten $a = 3\,cm, c = 5\,cm$ und die Fläche $F = 6\,cm^2$ aufweisen.

1.4.4 Das rechtwinklige Dreieck

Lehrsatz des Pythagoras

Der **Lehrsatz des Pythagoras** zählt wegen seiner großen Bedeutung für Berechnungen und Beweisführungen zu den bekanntesten Sätzen der Elementargeometrie.

Satz 1.51. ***Pythagoras***
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten. Sind a und b die Katheten und c die Hypotenuse, so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Die Gültigkeit dieses Satzes zeigen wir mithilfe der folgenden Abbildung.

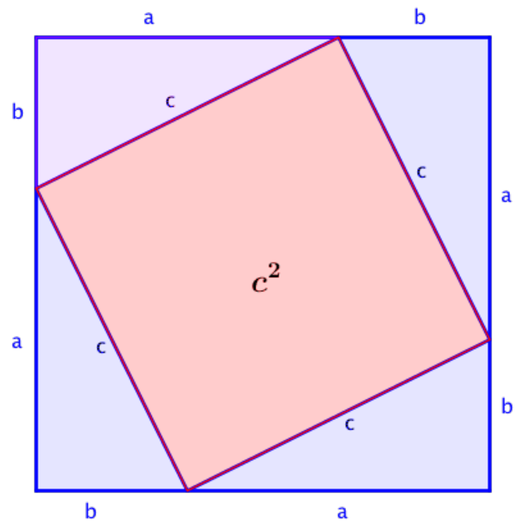


Abbildung 1.42: Satz des Pythagoras

Aus der Grafik kann man ablesen, dass die gesamte blau umrandete Quadratfläche

$$(a + b)^2$$

sich zusammensetzt aus der roten Quadratfläche c^2 und den vier blauen Dreiecksflächen, die sich zu

$$4 \cdot \frac{ab}{2}$$

addieren, da die Kathete b gleich der Höhe h_a ist. Wir haben also folgende Gleichung

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab.$$

Ausmultiplizieren der linken Seite ergibt

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

woraus die Behauptung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

folgt.

Beispiel 1.52. Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks
Da in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten senkrecht aufeinander stehen, ist eine Kathete die Höhe auf der jeweils anderen. Also kann man den Flächeninhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen, wenn die beiden Katheten k_1 und k_2 bekannt sind. Es folgt dann

$$F = \frac{1}{2} k_1 \cdot k_2. \tag{1.4}$$

Ein Zahlenbeispiel dazu: sind $a = 5\,cm$ und $b = 3\,cm$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so ergibt sich der Flächeninhalt zu:

$$F = \frac{1}{2} 5\,cm \cdot 3\,cm = 7,5\,cm^2.$$

Katheten- und Höhensatz

Weitere wichtige Aussagen über rechtwinklige Dreiecke werden durch den **Kathetensatz des Euklid** und den **Höhensatz** geliefert.

Satz 1.53. *Kathetensatz, Höhensatz*
Beide Sätze werden durch folgende Abbildung illustriert.

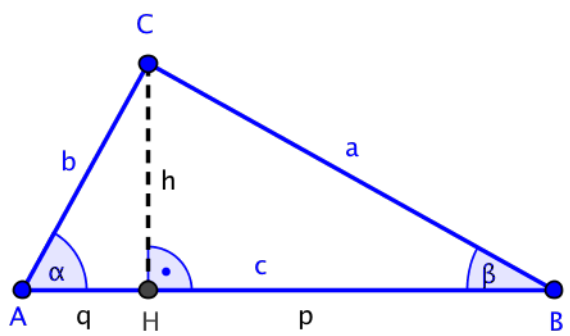


Abbildung 1.43: Kathetensatz, Höhensatz

In dem rechtwinkligen Dreieck ABC teilt die gestrichelte Höhe h die Hypotenuse c in die Abschnitte $p = \overline{HB}$ und $q = \overline{AH}$.

1. **Kathetensatz**: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden

Hypotenusenabschnitt:

$$\begin{aligned} a^2 &= p \cdot c \\ b^2 &= q \cdot c. \end{aligned}$$

2. **Höhensatz**: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf die Hypotenuse flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten:

$$h^2 = p \cdot q.$$

Beide Aussagen folgen aus der Tatsache, dass in der obigen Grafik die Dreiecke ABC, AHC und CHB ähnlich sind, da sie die gleichen Winkel haben. Damit sind auch die Seitenverhältnisse gleich. Es gilt

$$a : c = p : a \Rightarrow a^2 = p \cdot c$$

und

$$b : c = q : b \Rightarrow b^2 = q \cdot c$$

sowie

$$p : h = h : q \Rightarrow h^2 = p \cdot q.$$

Viele Aufgaben zur Bestimmung von Größen in geometrischen Figuren lassen sich dadurch lösen, dass Hilfskonstruktionen angelegt werden, in denen rechtwinklige Dreiecke vorkommen, deren Seitenlängen man mit den gerade hergeleiteten Sätzen ausrechnen kann. Wir schauen uns zwei Beispiele dazu an.

Beispiel 1.54. Abstand Mittelpunkt - Sehne
In einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei eine Sehne mit der Länge s eingezeichnet. Welchen Abstand hat die Sehne vom Mittelpunkt M? Wir verdeutlichen die Aufgabenstellung anhand einer Abbildung.

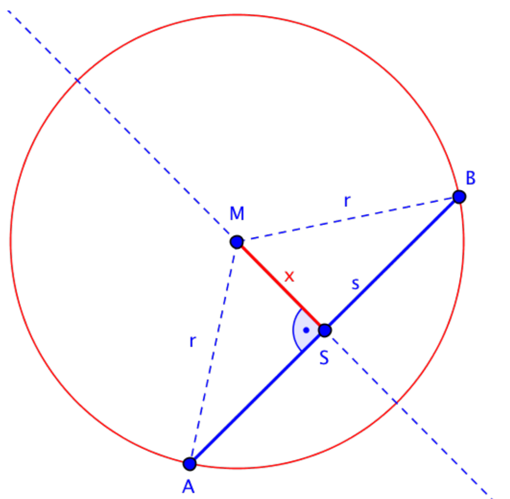


Abbildung 1.44: Abstand Mittelpunkt M zur Sehne s

Gesucht ist die Länge der roten Strecke x. Zunächst verbinden wir die Endpunkte A und B der Sehne s jeweils mit dem Mittelpunkt M des roten Kreises und erhalten das gleichschenklige (zwei Seiten sind gleich dem Radius r) Dreieck ABM. Dann fällen wir das Lot vom Punkt M auf die Sehne s (blaue gestrichelte Gerade) und erhalten als Lotfußpunkt den Punkt S. Da in einem gleichschenkligen Dreieck die Mittelsenkrechte und die Seitenhalbierende übereinstimmen, teilt der Punkt S die Sehne genau in der Mitte. Das Dreieck ASM ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse r und einer Kathete $s/2$, d.h. die Länge der gesuchten zweiten (roten) Kathete x kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$x^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Beispiel 1.55. Höhe im gleichseitigen Dreieck
Um die Höhe zu berechnen, benutzen wir die Eigenschaft, dass in einem gleichseitigen Dreieck die Höhe mit der Seitenhalbierenden und der Mittelsenkrechten zusammenfällt.

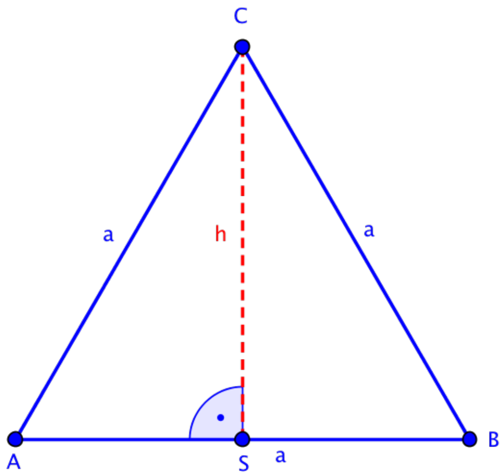


Abbildung 1.45: Höhe im gleichseitigen Dreieck

Der Abbildung entnehmen wir, dass die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ASC gleich a und die Kathete $\overline{AS}$ gleich $a/2$ ist. Die Höhe h kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}\,a^2} = \frac{a}{2}\,\sqrt{3}.$$

Für die Fläche A eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a folgt daraus

$$A = \frac{1}{2}\,a \cdot h = \frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}.$$

Aufgaben zum Abschnitt 1.4

1. Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ. Einbeschrieben in ABC sind der Inkreis mit Mittelpunkt M und das Berührdreieck $A_iB_iC_i$.

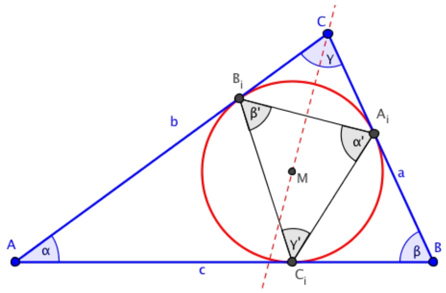


Abbildung 1.46: Abschnitt 1.4, Aufgabe 1

   a) Berechnen Sie die Länge der Strecken $\overline{AB_i}, \overline{B_iC}, \overline{AC_i}, \overline{C_iB}, \overline{CA_i}, \overline{A_iB}$ aus den Seitenlängen a, b, c.

   b) Berechnen Sie die Winkel α', β', γ' aus den Winkeln α, β, γ

2. Zeigen Sie zeichnerisch, dass der Umkreismittelpunkt, der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks auf einer Geraden liegen.

3. Verbindet man den Mittelpunkt M des Inkreises eines Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C und den Seiten a, b, c, so entstehen drei Dreiecke, die den Inkreisradius r als Höhe haben.

   a) Zeigen Sie, dass sich daraus die Dreiecksfläche F durch

   $$F = \frac{r}{2}\,(a + b + c)$$

   berechnen lässt.

   b) Wie groß ist der Inkreisradius eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Katheten $a = 8\,cm$ und $b = 6\,cm$ gegeben sind?

4. Wie kann man eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren?

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten $a = 3\,cm, b = 4\,cm, c = 5\,cm$

   a) mit der Formel (1.4)

   b) mit der Formel von Heron

6. Von einem Dreieck sind die Seiten $a = 5\,cm, b = 3\,cm$ und der Flächeninhalt $F = 6\,cm^2$ gegeben. Berechnen Sie die Seite c.

7. Von einem Dreieck sind die Kathete $a = 3\,cm$ und die Hypotenuse $c = 6\,cm$ gegeben. Berechnen Sie den Flächeninhalt F.

8. Verwandeln Sie zeichnerisch ein Rechteck mit den Seiten a und b in ein flächengleiches Quadrat.

9. Wie groß ist

   a) die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Kathete $b = 7{,}8\,cm$ und die Hypotenuse $c = 9{,}8\,cm$ lang sind?

   b) die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die beiden Katheten $a = 7{,}3\,cm$ und $b = 2{,}1\,cm$ lang sind?

10. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit den Schenkeln a soll die gleiche Fläche haben wie ein gleichseitiges mit der Seite b. Drücken Sie b durch a aus.

11. Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe $h = 3\,cm$ hat den Flächeninhalt $F = 12\,cm^2$. Berechnen Sie die Seiten a, b, c.

12. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden das Verhältnis $a : b = 3 : 4$. Wie groß sind a, b und der Flächeninhalt F, wenn die Hypotenuse $c = 8\,cm$ ist.

13. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Hypotenusenabschnitte $p = 5\,cm$ und $q = 3\,cm$ groß. Berechnen Sie die Katheten a, b und den Flächeninhalt F.

14. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Höhe $h = 5\,cm$ und der Hypotenusenabschnitt $q = 3\,cm$ gegeben. Berechnen Sie die Seiten a, b, c und den Flächeninhalt F.

1.5 Kreise

1.5.1 Definition und Begrifflichkeiten

Definition 1.56.
Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt, dem **Kreismittelpunkt** M, einen konstanten Abstand haben. Jede Strecke vom Kreismittelpunkt zu einem Punkt auf der Kreislinie heißt **Radius**. Jede Gerade durch zwei Punkte auf der Kreislinie nennt man **Sekante**, den auf ihr gelegenen Abschnitt, der nur Punkte des Kreisinneren enthält, **Sehne**. Die größten Sehnen sind die, die durch den Kreismittelpunkt M gehen, sie heißen **Kreisdurchmesser**. Geraden, die den Kreis in nur einem Punkt berühren, sind die **Tangenten**. Winkel, deren Scheitelpunkt ein Punkt auf der Kreislinie ist und deren Schenkel Sekanten sind, werden als **Peripheriewinkel** bezeichnet. Winkel, deren Scheitelpunkt der Kreismittelpunkt M ist, nennt man **Zentriwinkel**. Der durch einen Zentriwinkel ausgeschnittene Teil der Kreislinie heißt **Kreisbogen**. Die nachfolgende Grafik illustriert diese Begrifflichkeiten.

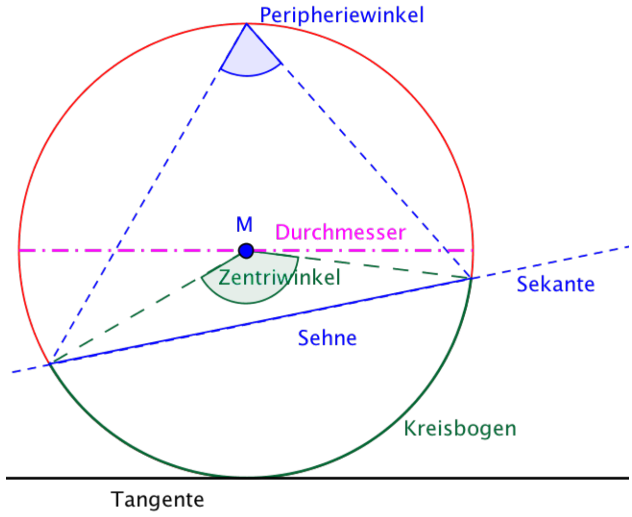


Abbildung 1.47: Bezeichnungen am Kreis

Beispiel 1.57. Abstand Mittelpunkt - Kreissehne
Wir berechnen, welchen Abstand der Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Radius $r = 5\,cm$ von einer Kreissehne mit der Länge $s = 6\,cm$ hat.

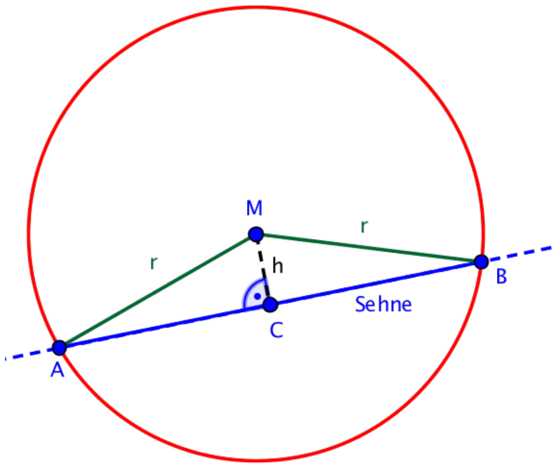


Abbildung 1.48: Abstand Mittelpunkt zur Sehne

Die Abbildung zeigt, dass das Dreieck ABM gleichschenklig ist, daher ist die schwarz gestrichelte Mittelsenkrechte der Sehne gleich der Seitenhalbierenden. Das Dreieck ACM ist rechtwinklig mit der Hypotenuse

$$r = 5\,cm$$

und der Kathete

$$\overline{AC} = \frac{s}{2} = 3\,cm.$$

Die gesuchte Strecke h ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras (siehe Beispiel 1.54) zu

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

1.5.2 Sätze über Winkel am Kreis

Peripheriewinkel

Es gibt eine wichtige Beziehung zwischen den Peripheriewinkel und dem Zentriwinkel.

Satz 1.58. ***Peripheriewinkelsatz***
Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zum gleichen Kreisbogen gehörige Zentriwinkel.
Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Der Kreismittelpunkt liegt auf einem der Schenkel des Peripheriewinkels:

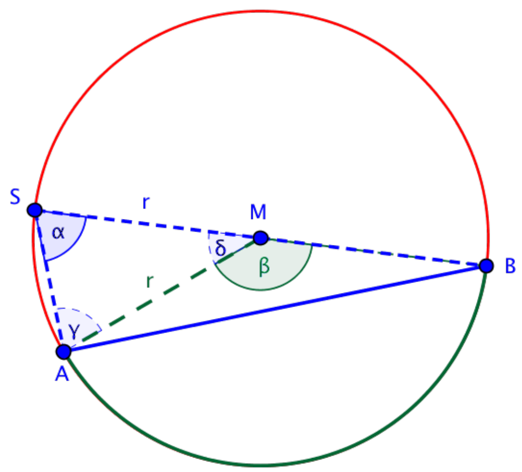


Abbildung 1.49: Peripheriewinkelsatz 1

In der Abbildung sind der Peripheriewinkel α mit dem Scheitelpunkt S über der Sehne $\overline{AB}$, der Zentriwinkel β mit dem Scheitelpunkt M sowie die beiden Hilfswinkel γ und δ eingezeichnet. Das Dreieck AMS ist gleichschenklig, da

$$\overline{AM} = \overline{SM} = r.$$

Daher gilt, dass die beiden Basiswinkel gleich sind

$$\alpha = \gamma.$$

Daraus folgt für den Winkel δ einerseits

$$\delta + 2\alpha = 180°,$$

da die Winkelsumme im Dreieck AMS 180° beträgt. Andererseits kann man an der Grafik ablesen, dass

$$\delta + \beta = 180°$$

ist. Aus beiden Gleichung ergibt sich:

$$\beta = 2\alpha.$$

2. Der Kreismittelpunkt liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels:

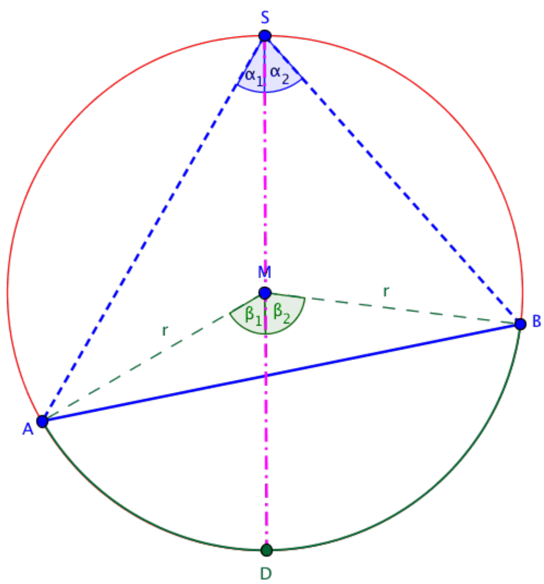


Abbildung 1.50: Peripheriewinkelsatz 2

In der Abbildung ist ein violetter Durchmesser $\overline{SD}$ eingezeichnet. Dieser teilt den Kreisbogen zwischen den Punkten A und B in zwei Teile. Für diese beiden Teile liegt jeweils der Kreismittelpunkt M auf der violetten Sehne der Peripheriewinkel α_1 und α_2 . Wir haben also zweimal den Fall 1. vorliegen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\alpha_1 \\ \beta_2 &= 2\alpha_2, \end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2a_1 + 2\alpha_2 = 2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = 2\alpha$$

folgt.

3. Der Kreismittelpunkt liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels:

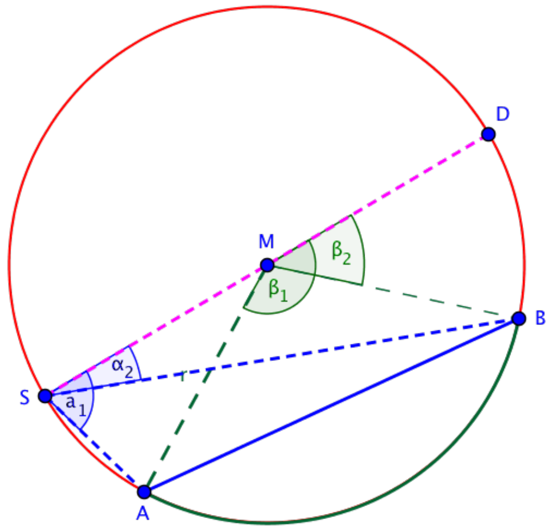


Abbildung 1.51: Peripheriewinkelsatz 3

Auch in diesem Fall führen wir die Aufgabenstellung auf den Fall 1. zurück. In der Abbildung ist wieder der violette Durchmesser SD eingezeichnet. Der Peripheriewinkel α ist jetzt die Differenz der Winkel

$$\alpha_1 - \alpha_2,$$

das Gleiche gilt für den Zentriwinkel:

$$\beta = \beta_1 - \beta_2.$$

Beim Peripheriewinkel α_1 sind die Schenkel die Strecken $\overline{SA}$ sowie der Kreisdurchmesser $\overline{SD}$, d.h. der Kreismittelpunkt liegt auf einem der Schenkel und damit folgt aus 1.

$$\beta_1 = 2\alpha_1.$$

Beim Peripheriewinkel α_2 sind die Schenkel die Strecken $\overline{SB}$ und wiederum der Kreisdurchmesser $\overline{SD}$. Also gilt auch hier

$$\beta_2 = 2\alpha_2$$

und insgesamt

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2\,(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha.$$

Schlussfolgerung 1.59.

1. Zu jedem Zentriwinkel gehört genau ein Kreisbogen und zu jedem Peripheriewinkel gehört genau ein Zentriwinkel. Zu jedem Bogen existieren aber beliebig viele Peripheriewinkel, d.h.
   Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen auf derselben Seite der Sehne sind gleich.

2. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt auch direkt der weiter oben schon gezeigte **Satz des Thales**: Ist nämlich die Sehne gleich dem Durchmesser des Kreises, so ist der Zentriwinkel 180° und damit folgt, dass jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter Winkel ist.

Beispiel 1.60. **Konstruktion eines Kreises aus Sehne und Peripheriewinkel**
Wir konstruieren zu einer vorgegebenen Strecke $s = 4\,cm$ mit den Endpunkten A und B den Kreis mit der Sehne s und dem Peripheriewinkel $\alpha = 30°$.

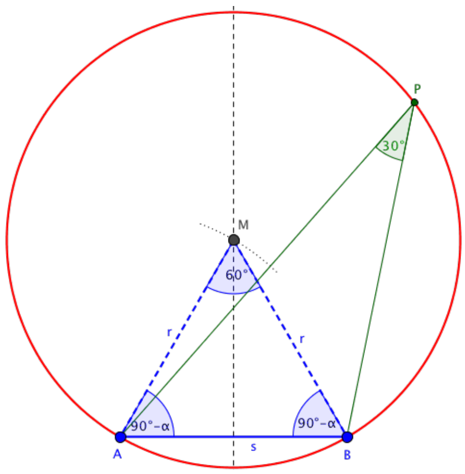


Abbildung 1.52: Konstruktion eines Kreises bei gegebener Sehne und gegebenem Peripheriewinkel

Wir errichten zunächst die schwarz gestrichelte Mittelsenkrechte der Strecke s, da der Mittelpunkt des Kreises M auf der Mittelsenkrechten von s liegt. Wir wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenklig ist, da zwei Seiten vom Radius des Kreises gebildet werden. Der Winkel $\angle AMB$ ist der Zentriwinkel und

$$2\alpha = 60°$$

groß. Die beiden anderen Winkel sind jeweils

$$90° - \alpha = 60°$$

groß. Das Dreieck ABM ist also ein gleichseitiges Dreieck. Wir zeichnen um A einen Kreis mit Radius

$$r = s = 4\,cm.$$

Dieser schneidet die Mittelsenkrechte im Mittelpunkt M des gesuchten Kreises.

Sehnentangentenwinkel

Definition 1.61.
Wandert der Scheitel eines Peripheriewinkels zwischen der Sehne A und B, bis er schließlich mit B zusammenfällt, so wird der eine Schenkel zur Tangente. Den Winkel zwischen der Sehne $\overline{AB}$ und dieser Tangente nennt man **Sehnentangentenwinkel**. Die folgende Abbildung illustriert diese Definition.

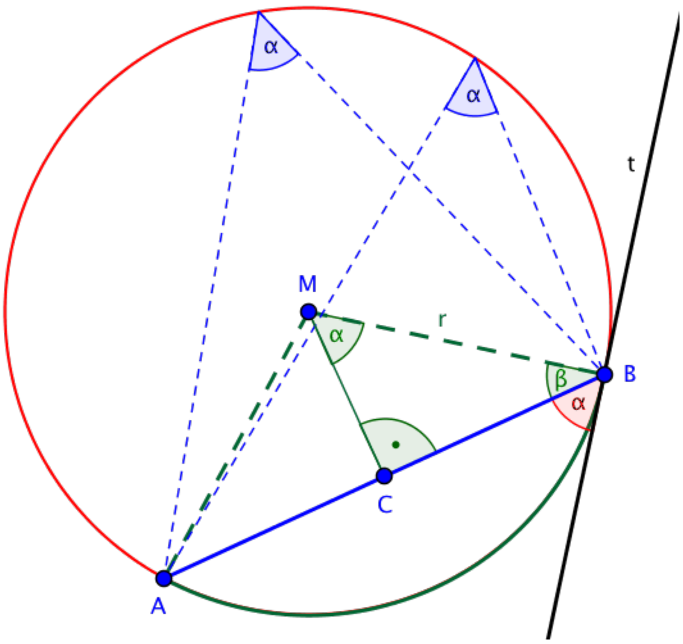


Abbildung 1.53: Sehnentangentenwinkel

Aus der Abbildung kann man mehrere wichtige Ergebnisse ableiten. Diese fassen wir in einem Satz zusammen.

Satz 1.62. ***Sehnentangentenwinkelsatz, Winkel zwischen Radius und Tangente***

1. Der rote Sehnentangentenwinkel α zwischen der Sehne $\overline{AB}$ und der Tangente t ist ebenso groß wie jeder Peripheriewinkel über der Sehne.

2. Fällt man vom Kreismittelpunkt M das Lot auf die Sehne $\overline{AB}$ so erhält man mit dem Lotfusspunkt C das rechtwinklige Dreieck MCB mit dem halben Zentriwinkel α. Der dritte Winkel β muss also die Gleichung

$$\alpha + \beta = 90°$$

erfüllen, damit die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Da der Winkel α aber auch als roter Sehnentangentenwinkel auftaucht, ist also der Winkel zwischen dem grün gestrichelten Radius r und der Tangente t gleich

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Wir erhalten das wichtige Ergebnis:
Der Radius steht senkrecht auf der Tangente.
Oder etwas anderes formuliert:
Die Senkrechte auf einem Radius in seinem auf der Kreislinie gelegenen Endpunkt B ist die Tangente an den Kreis in diesem Punkt.

Mit dem Sehnentangentenwinkelsatz können weitere Eigenschaften von geometrischen Figuren hergeleitet werden. Wir behandeln als Beispiel die Aufgabe, von einem Punkt außerhalb eines Kreises die Tangenten an den Kreis zu zeichnen und die Symmetrieachse der entstehenden Figur zu finden.

Beispiel 1.63. **Tangenten an den Kreis**
Liegt ein Punkt P außerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r, dann kann man die beiden Tangenten, die vom Punkt P an den Kreis angelegt werden können, mit Zirkel und Lineal konstruieren, wie folgende Abbildung zeigt.

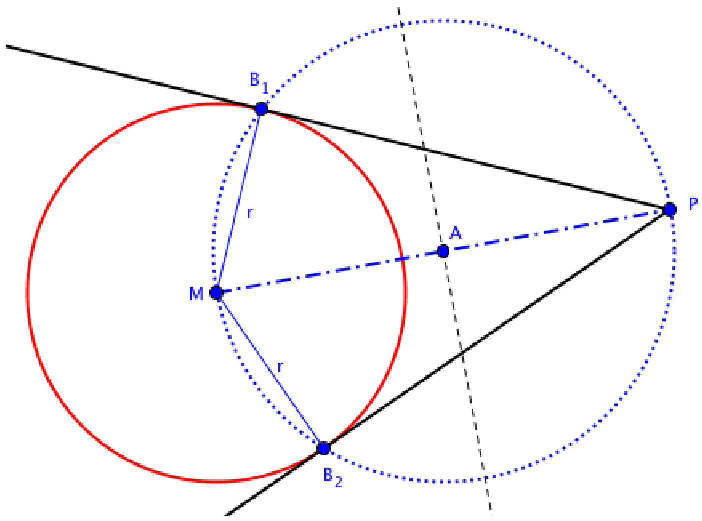


Abbildung 1.54: Tangenten von einem Punkt an den Kreis

Gegeben sind der rote Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie der Punkt P. Zunächst verbinden wir den Punkt P mit dem Mittelpunkt des Kreises (blau gestrichelt/gepunktet) und errichten auf der Verbindungslinie die schwarz gestrichelte Mittelsenkrechte, die die Strecke $\overline{PM}$ im Punkt A schneidet. Um A beschreiben wir einen blau gepunkteten Kreis mit dem Radius

$$\overline{AP} = \overline{AM},$$

der den roten Ausgangskreis in den Punkten B_1 und B_2 schneidet. Die beiden von P ausgehenden schwarzen Strahlen an den roten Kreis $\overrightarrow{PB_1}$ und $\overrightarrow{PB_2}$ sind die gesuchten Tangenten, da nach dem Satz des Thales („jeder Winkel über dem Durchmesser (des blau gepunkteten Kreises) ist ein rechter") diese Strahlen senkrecht auf den Radien r stehen. Die gesuchte Symmetrieachse ergibt sich aus folgender Grafik, in der die Konstruktionselemente für die Tangenten weggelassen wurde.

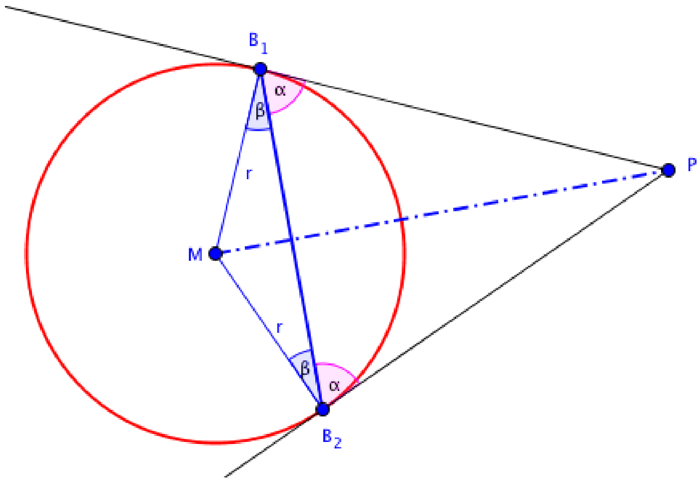


Abbildung 1.55: Symmetrieachse der Figur

Die beiden violetten Winkel α sind die Sehnentangentenwinkel der blauen Sehne $\overline{B_1B_2}$ und deshalb gleich. Auch die beiden blauen Winkel β sind gleich, da jeweils

$$\alpha + \beta = 90°$$

gilt. Das Dreieck PB_1B_2 ist gleichschenklig, da die beiden Basiswinkel α übereinstimmen. D.h. die Verbindungslinie durch P und M ist die Symmetrieachse der entstandenen Figur.

1.5.3 Sehnen und Sekantensätze

Weitere wichtige Anwendungen des Peripheriewinkelsatzes sind die **Sehnen und Sekantensätze**.

Satz 1.64. ***Sehnensatz, Sekantensatz, Sekantentangentensatz***

1. **Sehnensatz**: Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.

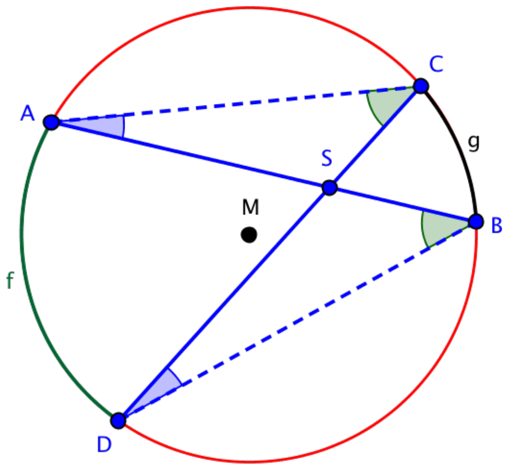


Abbildung 1.56: Sehnensatz

In der Abbildung sind die beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ blau eingezeichnet. Der Schnittpunkt der beiden Sehnen ist S. Wir wollen zeigen, dass

$$\overline{AS} \cdot \overline{SB} = \overline{DS} \cdot \overline{SC}$$

ist. Die beiden grünen Winkel sind beide Peripheriewinkel über dem grünen Kreisbogen f, sie sind also gleich. Die beiden blauen Winkel sind ebenfalls Peripheriewinkel über dem schwarzen Kreisbogen g und daher gleich. Das heißt, die Dreiecke ASC und DBS haben zwei (und damit auch drei) Winkel gemeinsam, sie sind ähnlich. Dann aber folgt für die Seitenverhältnisse

$$\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{DS} : \overline{SB}$$

und daraus

$$\overline{AS} \cdot \overline{SB} = \overline{DS} \cdot \overline{SC}.$$

2. **Sekantensatz**: Schneiden sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte vom Schnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich.

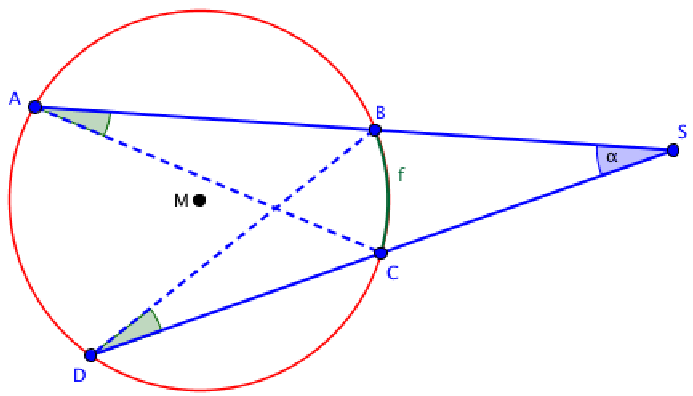


Abbildung 1.57: Sekantensatz

Die beiden Sekanten, die erste durch die Punkte A und B, die zweite durch die Punkte C und D scheiden sich im Punkt S. Wir zeigen, dass

$$\overline{SB} \cdot \overline{SA} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$$

ist. Die beiden grünen Winkel sind wieder gleichgroße Peripheriewinkel zum grünen Kreisbogen f. Daher haben die Dreiecke ACS und DSB je einen grünen und den blauen Winkel α gemeinsam, sie sind also ähnlich und für die Seitenverhältnisse folgt:

$$\overline{SB} : \overline{SD} = \overline{SC} : \overline{SA},$$

woraus wiederum

$$\overline{SB} \cdot \overline{SA} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$$

folgt.

3. **Sekantentangentensatz**: Schneidet eine Tangente eine Sekante außerhalb eines Kreises, so ist das Quadrat des Tangentenabschnittes gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte vom Schnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante.

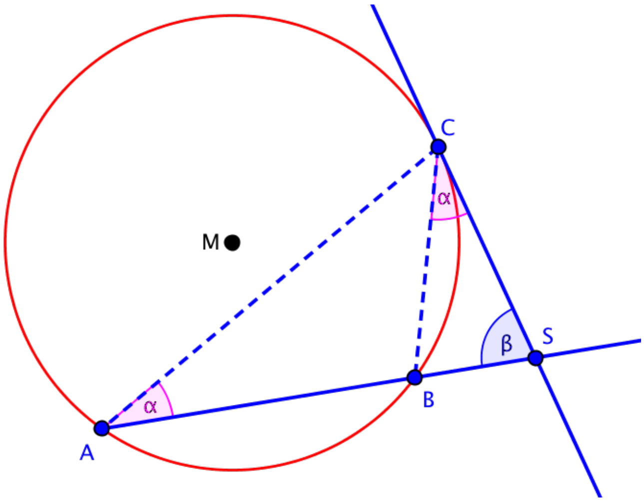


Abbildung 1.58: Sekantentangentensatz

In der Abbildung schneiden sich die Sekante durch A und B und die Tangente mit dem Berührpunkt C im Punkt S. Die Dreiecke ASC und BSC sind ähnlich, da sie den Winkel β und auch den Winkel α, der einmal als Peripheriewinkel der Sehne $\overline{BC}$ ($\alpha = \angle(SAC)$) und das andere Mal als Sehnentangentenwinkel ($\alpha = \angle(BCS)$) erscheint, gemeinsam haben. Für die Seitenverhältnisse gilt:

$$\overline{SC} : \overline{SB} = \overline{SA} : \overline{SC},$$

woraus

$$\overline{SC}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$$

folgt.

Beispiel 1.65. **Aus dem Sehnensatz folgt der Höhensatz**
Wir zeigen, dass der Höhensatz ein Sonderfall des Sehnensatzes ist, und benutzen dazu folgende Abbildung.

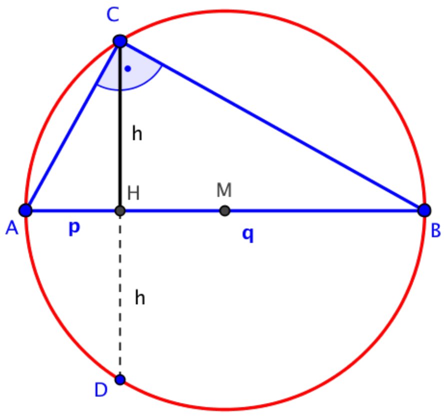


Abbildung 1.59: Aus dem Sehnensatz folgt der Höhensatz

In der Abbildung sind ein roter Kreis und die zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eingezeichnet, die sich im Punkt H schneiden. Die Sehne $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Kreises, deshalb ist der Winkel $\angle ACB$ nach dem Satz von Thales ein rechter und das Dreieck ABC damit rechtwinklig. Die Strecke $h = \overline{CH}$ ist die Höhe auf $\overline{AB}$ und es gilt

$$\overline{CD} = 2h.$$

Nach dem Sehnensatz gilt nun

$$\overline{AH} \cdot \overline{HB} = \overline{CH} \cdot \overline{HD},$$

d.h.

$$p \cdot q = h^2,$$

was genau die Aussage des Höhensatzes ist.

1.5.4 Vierecke am Kreis

Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt **Sehnenviereck**. Ein Viereck, dessen Seiten die Tangenten eines Kreises sind, nennt man **Tangentenviereck**. Es gelten folgende Aussagen.

Satz 1.66. ***Sehnenviereck, Tangentenviereck***

1. **Sehnenviereck**: Im Sehnenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel stets 180°.

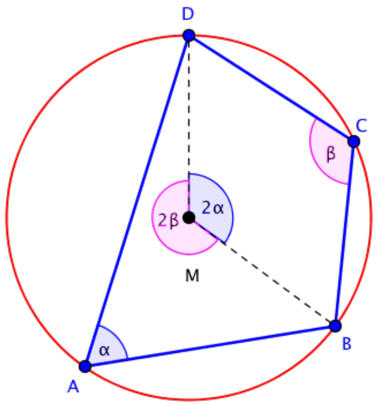


Abbildung 1.60: Sehnenviereck

In der Abbildung sind das Sehnenviereck $ABCD$ und zwei gegenüber liegende Winkel α und β eingezeichnet. Diese Winkel sind Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{BD}$, allerdings auf unterschiedlichen Seiten der Sehne. Die beiden zugehörigen Zentriwinkel sind jeweils doppelt so groß wie die Peripheriewinkel und ergeben zusammen 360°:

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Da die Winkelsumme im Viereck insgesamt 360° beträgt, ist auch die Summen der beiden anderen gegenüberliegenden Winkel (in der Grafik nicht eingezeichnet) ebenfalls gleich 180°.
Es gilt auch die Umkehrung des Satzes: Nur diejenigen Vierecke, bei denen die Summe der gegenüberliegenden Winkel 180° beträgt, haben einen Umkreis.

2. **Tangentenviereck**: Im Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der anderen Gegenseiten.

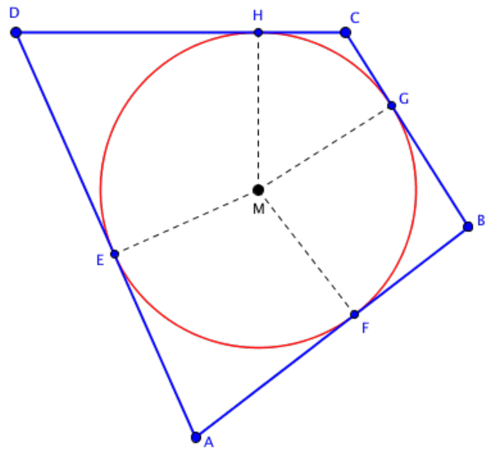


Abbildung 1.61: Tangentenviereck

In der Abbildung sind das Tangentenviereck $ABCD$ sowie die Berührpunkte E, F, G, H der Tangenten an den Kreis eingezeichnet. Da nach Beispiel 1.63 die Längen der Tangentenabschnitte von einem Punkt an den Kreis gleich lang sind, gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \overline{AE} \\ \overline{FB} &= \overline{BG} \\ \overline{CH} &= \overline{GC} \\ \overline{HD} &= \overline{ED} \end{aligned}$$

und damit auch

$$\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{CH} + \overline{HD} = \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{BG} + \overline{GC}.$$

Wie fassen die Seitenabschnitte zusammen und erhalten das gewünschte Resultat:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Auch hier gilt die Umkehrung: Nur diejenigen Vierecke, bei denen die jeweiligen Summen zweier gegenüberliegender Seiten gleich sind, haben einen Inkreis. □

Beispiel 1.67. In- und Umkreise
Nach dem letzten Satz folgt, dass

- ein Quadrat einen In- und Umkreis hat,
- ein Rechteck einen Umkreis, aber keinen Inkreis hat
- und ein allgemeines Parallelogramm weder einen Inkreis noch einen Umkreis hat.

Neben dem Quadrat haben auch alle anderen **regelmäßigen n-Ecke** sowohl einen In- als auch einen Umkreis.

1.5.5 n-Ecke

Definition 1.68.
Ein n-**Eck** ist eine geschlossene ebene Figur mit n gradlinigen, sich nicht schneidenden Begrenzungsstrecken, die sich in n Eckpunkten treffen. Die Verbindungsstrecken *benachbarter Ecken* heißen **Seiten**, die *nicht benachbarter Ecken* **Diagonalen** des n-Ecks. Wir verlangen, dass alle Diagonalen ganz im Inneren der Figur verlaufen, d.h. keiner der Winkel zwischen zwei Seiten ist größer als 180°.

Satz 1.69. ***Anzahl Diagonalen, Winkelsumme im n-Eck***
In einem n-Eck ist die Anzahl der Seiten stets gleich der Anzahl der Ecken. Da sich von allen n Ecken zu allen nicht benachbarten Ecken (das sind $n-3$) Diagonalen ziehen lassen, gibt es zunächst $n(n-3)$ Diagonalen. Beachtet man aber, dass die Diagonale vom Eckpunkt A zum Eckpunkt B die gleiche ist wie vom Eckpunkt B zum Eckpunkt A, so folgt, dass die Anzahl der Diagonalen im n-Eck gleich

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

ist.
Aus der Formel folgt, dass es für ein Dreieck ($n = 3$) keine Diagonale und für ein Viereck ($n = 4$) zwei Diagonalen gibt.
Durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen wird das n-Eck in $n-2$ Dreiecke zerlegt. Die die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergibt sich für die Winkelsumme im n-Eck

$$180^\circ \cdot (n-2).$$

Für $n = 3$ folgt als Winkelsumme des Dreiecks aus dieser Formel wieder

$$180^\circ(3-2) = 180^\circ$$

und für $n = 4$ im Viereck

$$180^\circ(4-2) = 360^\circ.$$

Hat ein n-Eck n gleich lange Seiten und n gleich große Winkel, so nennt man es ***regelmäßig****. Das Quadrat ist also ein regelmäßiges 4-Eck. Jeder Winkel α eines regelmäßigen n-Ecks lässt sich durch*

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

berechnen. Für das gleichseitige Dreieck ($n = 3$) ergibt sich daraus

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{3} = 60^\circ$$

und für das Quadrat ($n = 4$)

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Verbindet man den Mittelpunkt M des Umkreises eines regelmäßigen n-Ecks mit den n Ecken, so wird das regelmäßige n-Eck in n kongruente gleichschenklige (zwei Seiten werden durch den Radius r des Umkreises gebildet) Dreiecke zerlegt, die den Winkel

$$\frac{360^\circ}{n}$$

an dem Scheitelpunkt M und jeweils die Winkel $\alpha/2$ an der Basis haben.

Wir wollen diese Sachverhalte beispielhaft an einem regelmäßigen Sechseck erläutern.

Beispiel 1.70. **Regelmäßiges Sechseck**
Die 6 kongruenten gleichschenkligen Dreiecke sind hier sogar gleichseitig mit der Seitenlänge r. Konstruiert wird das regelmäßige Sechseck dadurch, dass man auf dem Umfang eines Kreises mit Radius r den Radius sechsmal hintereinander abträgt und so die sechs Eckpunkte erhält. Da die Seiten des Sechsecks Sehnen sind, ist das so konstruierte Sechseck ist ein Sehnensechseck. Mithilfe dieses Sehnensechsecks können wir ein weiteres regelmäßiges Sechseck konstruieren, das ein Tangentensechseck bildet. Die nachfolgende Abbildung erläutert die Vorgehensweise.

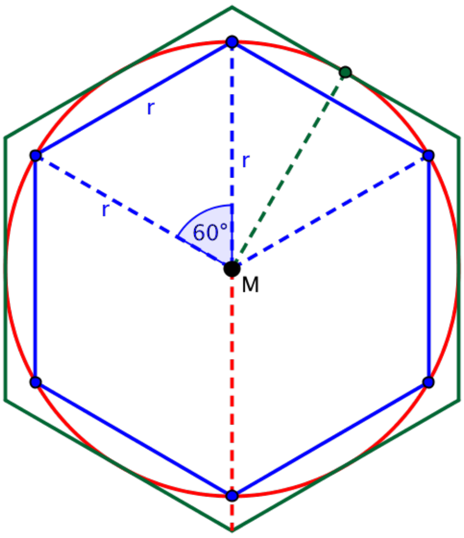


Abbildung 1.62: Regelmäßiges Sechseck

In der Grafik sind auf dem roten Kreisbogen sechs blaue Punkte eingetragen, die die Eckpunkte eines blauen regelmäßigen Sehnensechseck bilden. Wir erkennen, dass die Dreiecke, die durch den Mittelpunkt M und je zweier benachbarter Eckpunkte gebildet werden, gleichseitig (Seitenlänge r) und damit auch gleichwinklig (Winkel 60°) sind. Das grüne regelmäßige Tangentensechseck erhalten wir, wenn wir die Winkelhalbierende für jeden Mittelpunktswinkel konstruieren, was in der Abbildung beispielhaft durch die gestrichelte grüne Linie dargestellt ist. Die Winkelhalbierenden schneiden den Kreisbogen in sechs Punkten, in der Grafik ist einer der Punkte grün markiert. Nun konstruieren wir die sechs Tangenten durch diese sechs Punkte. Diese Tangenten schneiden sich in sechs Punkten, die die Eckpunkte des gesuchten regelmäßigen Tangentensechsecks sind. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass die Eckpunkte des Tangentensechsecks jeweils auf der Verbindungsgeraden (rote gestrichelte Linie) vom Mittelpunkt zu den Eckpunkten des Sehnensechsecks liegen.

1.5.6 Umfang und Fläche eines Kreises

Umfang

Satz 1.71. ***Umfang des Kreises***
Die Länge der Kreislinie, d.h. den Umfang des Kreises kann man nur mit Mitteln der höheren Mathematik exakt berechnen. Die elementare Geometrie bietet allerdings Möglichkeiten den Umfang U eines Kreises mit Radius r annähernd zu bestimmen. Dazu benutzen wir die Konstruktion des letzten Beispiels. Offenbar liegt die Länge der roten Kreislinie zwischen dem blauen Umfang U_S des Sehnensechsecks und dem grünen Umfang U_T des Tangentensechsecks. Den Umfang des Sehnensechsecks kann man leicht berechnen, er beträgt

$$U_S = 6\,r = 3\,d,$$

wobei d den Durchmesser des Kreises bezeichnet. Um den Umfang U_T zu berechnen, schauen wir uns einen Ausschnitt aus der obigen Grafik an:

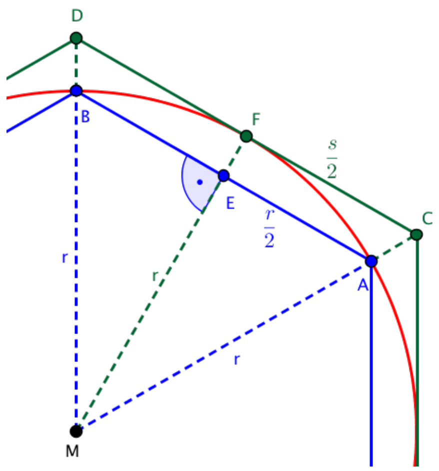


Abbildung 1.63: Umfang eines Kreises

Wir haben die blaue Seite $\overline{AB}$ des Sehnensechsecks mit der Länge r und die grüne Seite $\overline{DC}$ Tangentensechsecks mit der unbekannten Länge s vergrößert dargestellt und die Lotfußpunkte der grünen Mittelsenkrechten auf beide Seiten (E und F) eingezeichnet. Die Länge der grünen Strecke $\overline{MF}$ ist gleich dem Radius r. Da das Dreieck AEM rechtwinklig ist, lässt sich die Länge der Strecke $\overline{ME}$ mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen:

$$\overline{ME} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Nun beachten wir, dass die Dreiecke AEM und CFM ähnlich sind, da sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Daher folgt für die Verhältnisse der Seiten

$$\overline{MF} : \overline{ME} = \frac{s}{2} : \frac{r}{2}.$$

Wir setzen die gefundenen Größen ein

$$\frac{r}{\frac{r}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{r}{2}}$$

und lösen die Gleichung nach s auf

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{s}{r} \Rightarrow s = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Für den Umfang U_T des Tangentensechsecks erhalten wir also

$$U_T = 6s = 6\,\frac{d}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,d \approx 3,4641\,d. \tag{1.5}$$

Der Kreisumfang U liegt zwischen U_S und U_T, d.h. es gilt

$$3\,d < U < 3,4641\,d.$$

Als Schätzung für den Kreisumfang nehmen wir das arithmetische Mittel von U_S und U_T:

$$U \approx \frac{U_S + U_T}{2} = \frac{3 + 3,4641}{2}\,d = 3,23205\,d.$$

Diese Schätzung kann man verbessern, indem man regelmäßige Sehnen-n-Ecke betrachtet, die mehr als sechs Ecken aufweisen. Schon im Altertum hat man eine Schätzung von U mit Hilfe eines regelmäßiges 96-Ecks, das durch fortlaufende Halbierung der Seiten des regelmäßigen 6-Ecks konstruiert werden kann, gefunden und den Wert

$$U \approx 3,1418733\,d$$

erzielt. Die exakte Formel für den Umfang eines Kreises mit Durchmesser d lautet

$$U = \pi\,d,$$

wobei π eine irrationale Zahl ist, die auf sechs Stellen genau den Wert

$$\pi = 3,141593$$

hat.

Im Allgemeinen braucht man Hilfsmittel aus der **Trigonometrie**, um Formeln zur Ermittlung des Umfangs von Sehnen- und Tangentenvierecken bei beliebigen regelmäßigen n-Ecken herzuleiten. Das folgende Beispiel kommt ohne diese Hilfsmittel aus.

Beispiel 1.72. **Regelmäßiges Achteck**
Wir wollen die Seitenlängen und die Umfänge eines regelmäßigen Sehnen- und Tangentenachtecks berechnen und die nachfolgende Abbildung als Argumentationshilfe nutzen.

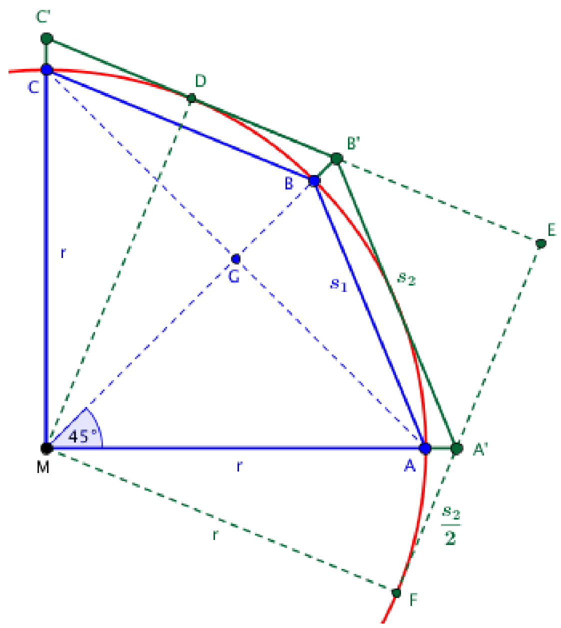


Abbildung 1.64: Umfang eines regelmäßigen Sehnen- und Tangentenachtecks

Die Grafik zeigt einen Kreisabschnitt eines roten Kreises mit Radius r und Mittelpunkt M sowie jeweils zwei Seiten des Sehnenachtecks (blau) und des Tangentenachtecks (grün).

1. Sehnenachteck: Wir betrachten zunächst nur die blauen Linien und Symbole und ermitteln die Länge der Seite s_1 des Sehnenachtecks. Da in einem regelmäßigen Sehnenachteck die Winkel zwischen zwei Eckpunkten und dem Mittelpunkt jeweils 45° sind, ist der Winkel $\angle AMC$ ein rechter Winkel und somit das Dreieck ACM rechtwinklig und gleichschenklig mit den Katheten r. Mit dem Satz des Pythagoras folgt daraus
$$\left(\overline{AC}\right)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \Rightarrow \overline{AC} = r\sqrt{2}.$$
Das Dreieck AGM ist ebenfalls rechtwinklig und gleichschenklig, d.h. die Strecken $\overline{MG}$ und $\overline{AG}$ sind gleich und da G genau in der Mitte von $\overline{AC}$ liegt, gilt
$$\overline{MG} = \overline{AG} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Für die gesuchte Strecke $s_1 = \overline{AB}$ ergibt sich daraus mit dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} (s_1)^2 &= \left(\overline{AG}\right)^2 + \left(\overline{GB}\right)^2 \\ &= \frac{r^2}{2} + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \frac{r^2}{2} + r^2 - r^2\sqrt{2} + \frac{r^2}{2} \\ &= r^2\left(2-\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

und daraus

$$s_1 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

sowie für den Umfang

$$U_S = 8s_1 = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

2. Tangentenachteck: Bei der Ermittlung der Seitenlänge s_2 des Tangentenachtecks konzentrieren wir uns auf die grünen Linien und Beschriftungen. Da das Dreieck $A'EB'$ rechtwinklig und gleichschenklig ist, folgt mit dem Satz des Pythagoras

$$(s_2)^2 = \left(\overline{A'E}\right)^2 + \left(\overline{EB'}\right)^2 = 2\left(\overline{A'E}\right)^2 \Rightarrow \overline{A'E} = \frac{s_2}{2}\sqrt{2}.$$

Ferner gilt mit $\overline{FA'} = \dfrac{s_2}{2}$

$$\overline{FE} = r = \overline{FA'} + \overline{A'E} = \frac{s_2}{2} + \frac{s_2}{2}\sqrt{2} \Rightarrow s_2 = \frac{2r}{1+\sqrt{2}}$$

sowie für den Umfang

$$U_T = 8s_2 = \frac{16r}{1+\sqrt{2}}.$$

3. Wir berechnen das arithmetische Mittel der beiden Umfänge als Schätzung für den Kreisumfang und erhalten mit $d = 2r$

$$U \approx \frac{U_S + U_T}{2} = \frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}} + \dfrac{8}{1+\sqrt{2}}}{2}\, d = 3{,}18759\, d,$$

also eine etwas bessere Näherung für π als beim regelmäßigen Sechseck.

Flächeninhalt

Satz 1.73. ***Flächeninhalt des Kreises***
Auch der Flächeninhalt eines Kreises lässt sich nur mit höherer Mathematik exakt bestimmen. Man kann allerdings mit Hilfe der elementaren Geometrie Näherungsgrößen berechnen. Dazu schauen wir uns die nachfolgende Grafik an.

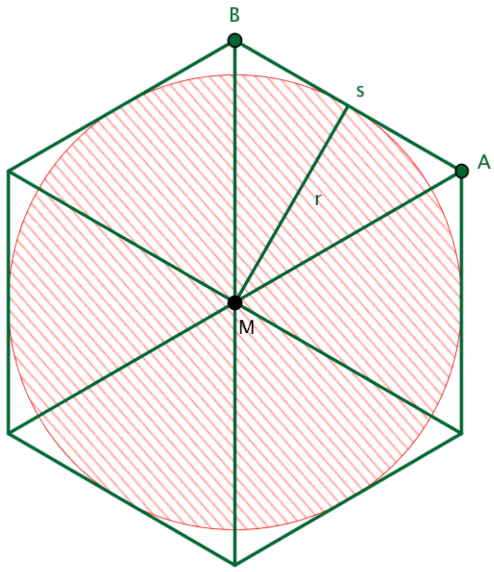


Abbildung 1.65: Fläche des Kreises

In der Abbildung ist die Fläche des Kreises rot gestreift gekennzeichnet. Diese Fläche wird durch die Fläche des grünen regelmäßigen Tangentensechsecks mit der Seitenlänge s angenähert. Das Tangentensechseck ist in 6 gleichseitige Dreiecke aufgeteilt, deren Höhe jeweils der Radius r ist, d.h. für den Flächeninhalt A_D eines Dreiecks gilt mit Gleichung (1.2)

$$A_D = \frac{1}{2}\, s \cdot r$$

und damit für den Flächeninhalt A_T des Tangentensechsecks

$$A_T = 6 \cdot \frac{1}{2}\, s \cdot r = U_T \cdot \frac{r}{2},$$

da der Umfang des Tangentensechsecks

$$U_T = 6s$$

ist. Wir setzten den in Gleichung (1.5) gefundenen Wert für U_T ein und erhalten mit $d = 2r$

$$A_T = U_T \cdot \frac{r}{2} = 3,4641\, d \cdot \frac{r}{2} = 3,4641\, 2r \cdot \frac{r}{2} = 3,4641\, r^2$$

und damit als Näherung für die Kreisfläche A_K

$$A_K \approx 3,4641\, r^2.$$

Aus den obigen Überlegungen wissen wir, dass die Zahl vor dem Faktor r^2 sich immer mehr der Zahl π annähert, wenn man die Anzahl der Ecken des Tangentenvielecks weiter erhöht, d.h. die exakte Formel für die Kreisfläche ist

$$A_K = \pi\, r^2.$$

Beispiel 1.74. Durchmesser und Umfang eines Kreises

1. Welchen Durchmesser d hat eine Kreis mit dem Flächeninhalt $A_k = 16\pi\, cm^2$?
   Es gilt
   $$A_k = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$
   woraus
   $$d = 2\sqrt{\frac{A_k}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{16\pi\, cm^2}{\pi}} = 8\, cm$$
   folgt.

2. Wir groß ist der Umfang U eines Kreises, wenn der Flächeninhalt $A_k = 9\, cm^2$ ist?
   Es gilt
   $$A_k = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_k}{\pi}}.$$
   Also folgt
   $$U = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{A_k}{\pi}} = 2\sqrt{A_k\pi} = 2\sqrt{9\, cm^2\pi} = 6\sqrt{\pi}\, cm = 10,64\, cm.$$

Aufgaben zu Abschnitt 1.5

1. Welchen Durchmesser d hat ein Kreis mit dem Flächeninhalt $A_k = 20\, cm^2$?

2. Wir groß ist der Umfang U eines Kreises, wenn der Flächeninhalt $A_k = 8\, cm^2$ ist?

3. Um die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seite $a = 4\, cm$ sind vier Kreise mit dem Radius $r = 2\, cm$ geschlagen. Wie groß ist die Fläche F, wenn man die in das Quadrat hineinragenden Kreisflächen von der Quadratfläche abzieht (Unschraffierte Fläche im blauen Quadrat in nachfolgender Abbildung)?

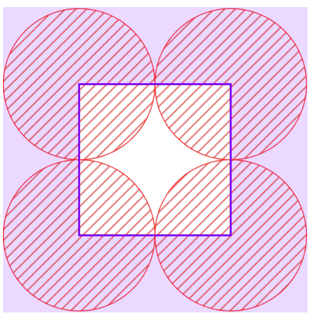


Abbildung 1.66: Abschnitt 1.5, Aufgabe 3

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche. Die Seitenlänge des blauen Quadrates sei $a = 4\,cm$.

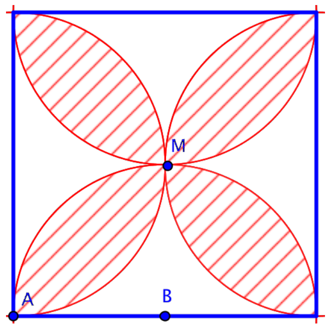


Abbildung 1.67: Abschnitt 1.5, Aufgabe 4

5. Von einem Kreis sind der Umfang $U = 30\,cm$ und die Höhe $h = 2\,cm$ der Sehne $s$bekannt. Berechnen Sie die Länge der Sehne.

6. In einem Kreis seien zwei beliebige Sehnen s_1 und s_2 eingezeichnet. Rekonstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises.

7. Konstruieren Sie den Kreisbogen, der zu einer gegebenen Sehne s gehört und den gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel enthält.

8. Sie stehen auf einem $400\,m$ hohen Berg und haben freie Sicht. Wie weit können Sie schauen, wenn Sie annehmen, dass die Erde eine Kugel mit Radius $6.367\,km$ ist? *Hinweis: Verwenden Sie den Sekantentangentensatz!*

9. Konstruieren Sie einen Kreis, der durch zwei verschiedene Punkte A und B verläuft und eine gegebene Gerade g, die nicht parallel zu $\overline{AB}$ verläuft, berührt.

10. Zeigen Sie, dass für ein Tangentenviereck $ABCD$ mit dem Inkreismittelpunkt M und dem Inkreisradius r

    a) die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABM und DCM gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BCM und DAM ist.

    b) der Flächeninhalt des Tangentenvierecks gleich $r \cdot \frac{U}{2}$ ist, wobei U den Umfang des Tangentenvierecks bezeichne.

11. Welchen Flächeninhalt hat das in nachfolgender Abbildung dargestellte Bogendreieck. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit Seitenlänge a. Die Punkte A, B, C sind die Mittelpunkte der Kreisbögen.

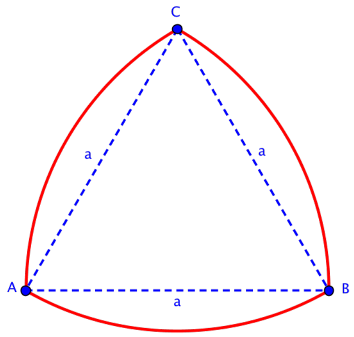


Abbildung 1.68: Abschnitt 1.5, Aufgabe 11

12. Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Eine Gerade g durch A schneide die Kreise in A_1 und A_2, eine Gerade durch B schneide die Kreise in B_1 und B_2. Zeigen Sie, dass $\overline{A_1B_1}$ parallel zu $\overline{A_2B_2}$ ist.

1.6 Stereometrie

Wir haben uns bislang bei der Betrachtung von geometrischen Objekten in der Ebene aufgehalten. Diese Einschränkung lassen wir in diesem Abschnitt fallen und behandeln jetzt Objekte, die sich im dreidimensionalen Raum befinden und die nicht in einer Ebene abgebildet werden können. Die Geometrie des dreidimensionalen Raumes wird als **Stereometrie** bezeichnet. Eine der Hauptaufgaben der Stereometrie besteht in der Berechnung des Volumens und der Oberfläche von **mathematischen Körpern**.

Definition 1.75.
Ein **mathematischer Körper** ist die Menge aller Punkte, die innerhalb eines vollständig abgeschlossenen Teiles des dreidimensionalen Raumes liegen. Die gesamte äußere Begrenzungsfläche heißt **Oberfläche**, der von ihr vollständig umschlossene Teil des Raumes heißt **Volumen** des Körpers.
Ist ein mathematischer Körper nur von Ebenen begrenzt, so wird er **Polyeder** genannt. Beispiele für Polyeder sind der Würfel, der Quader, das Prisma oder die Pyramide. Die das Polyeder begrenzenden Vielecke heißen **Seitenflächen**, diese schneiden sich in den **Kanten**. Der Schnittpunkt von mindestens drei Kanten ergibt eine **Ecke**.
Setzt sich die Oberfläche eines Körpers ganz oder teilweise aus krummen Flächen zusammen, so spricht man von einem **krummflächigen Körper**. Die bekanntesten krummflächigen Körper sind die Kugel, der Zylinder und der Kegel.

1.6.1 Quader und Würfel

Definition 1.76.

1. Ein **Quader** ist ein Polyeder mit acht rechtwinkligen Ecken und zwölf Kanten, von

denen je vier gleich lang und zueinander parallel sind. Er wird von sechs Rechtecken begrenzt, von den je zwei flächengleich sind und in parallelen Ebenen liegen.

2. Ein **Würfel** ist ein spezieller Quader, bei dem alle Kanten gleich lang sind und der von sechs gleichen, aufeinander senkrecht stehenden Quadraten begrenzt wird.

Satz 1.77. ***Oberfläche, Volumen, Diagonalen***
Bezeichnen a, b, c die in der Regel unterschiedlichen Kantenlängen, so ergibt sich für die Oberfläche eines Quaders

$$A = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Das Volumen V wird nach der Regel „Grundfläche mal Höhe" berechnet. Die Grundfläche ist die Fläche des Rechtecks mit den Seiten a und b, also gleich $a \cdot b$. Damit ergibt sich für das Volumen eines Quaders

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Da ein Würfel ein Quader mit gleicher Kantenlänge ist, d.h. $a = b = c$, folgt für die Oberfläche und das Volumen eines Würfels:

$$A = 6a^2$$

und

$$V = a^3.$$

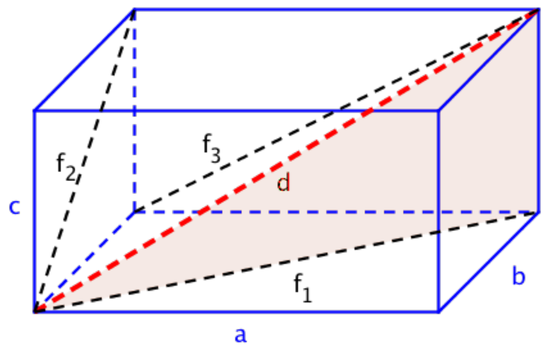


Abbildung 1.69: Quader mit Kanten a, b, c

In der Abbildung sind ein blauer Quader mit den Kantenlängen a, b, c sowie die drei schwarzen Flächen- und eine rote Raumdiagonale eingezeichnet. Mit dem Satz des Pythagoras folgt für die ***Flächendiagonalen***

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ f_2 &= \sqrt{b^2 + c^2} \\ f_3 &= \sqrt{a^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Wenden wir den Satz des Pythagoras nochmals auf das hellbraune Dreieck an, so ergibt sich für die ***Raumdiagonale*** *d*

$$d = \sqrt{f_1^2 + c^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Für den Würfel ergibt sich daraus

$$f_1 = f_2 = f_3 = f = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$$

und

$$d = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3}.$$

Zwischen Kantenlänge, Flächendiagonale und Raumdiagonale eines Würfels gilt das Verhältnis

$$a : f : d = a : a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

Beispiel 1.78. Verhältnisse von Oberflächen und Volumina zweier Würfel
Wie groß ist das Verhältnis der Oberflächen und der Volumina zweier Würfel, deren Kanten im Verhältnis 1:2 stehen?

Lösung: Für das Verhältnis der Oberflächen gilt

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6a^2}{6(2a)^2} = \frac{1}{4},$$

für das Verhältnis der Volumina folgt analog

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{(2a)^3} = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 1.79. Restvolumen von Quadern
Aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche, d.h. mit den Kantenlängen a, a, c wird ein zweiter Quader herausgeschnitten, dessen Ecken mit den Mittelpunkten der Kanten des ersten zusammenfallen. Wir groß ist das Volumen der vier entstehenden Restkörper?

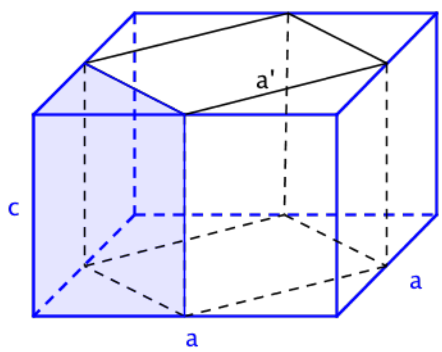


Abbildung 1.70: Quader aus Quader herausgeschnitten

Wir berechnen zunächst das Volumen V' des herausgeschnittenen Quaders. Er hat die Kantenlängen a', a' und c. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$a' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

und daraus für das Volumen

$$V' = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)c = \frac{a^2c}{2}.$$

Zur Berechnung des Volumens V_R der vier Restkörper bilden wir die Differenz der beiden Quader

$$V_R = V - V' = a^2c - \frac{a^2c}{2} = \frac{a^2c}{2}.$$

D.h. jeder der vier kongruenten (prismatischen) Restkörper hat das Volumen

$$V_{Prisma} = \frac{a^2c}{8}.$$

1.6.2 Prisma und Zylinder

Definition 1.80.

1. Ein **Prisma** ist ein Polyeder mit zwei kongruenten und zueinander parallelen n-Ecken als Grundflächen und n Parallelogrammen als Seitenflächen. Sind die $n - Ecke$ regelmäßig, so nennt man das Prisma **regelmäßig**, andernfalls **unregelmäßig**. Stehen die Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen, so ist das Prisma **gerade**, andernfalls **schief**. Den Abstand der beiden Grundflächen nennt man **Höhe** des Prismas. Die Seitenflächen von geraden Prismen sind Rechtecke. Wichtige Beispiele von geraden Prismen sind der Quader und der Würfel. Die Summe der Seitenflächen nennt man auch **Mantel** des Prismas.

2. Ein **Kreiszylinder** (kurz **Zylinder**) ist ein krummlinig begrenzter Körper mit zwei zueinander parallelen Kreisen mit gleichen Radien als Grundflächen. Steht die Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der beiden Kreise, die auch **Achse des Zylinders** genannt wird, senkrecht auf beiden Grundflächen, so ist der Kreiszylinder **gerade**, andernfalls **schief**. Den Abstand der beiden Grundflächen nennt man **Höhe** des Zylinders. Die Seitenfläche eines Kreiszylinders, die auch **Mantel** genannt wird, ist regelmäßig gekrümmt und stimmt mit der Krümmung der Grundflächenkreislinien überein.

Beispiel 1.81. Prisma mit dreieckiger Grundfläche, Kreiszylinder

1. Teilt man einen Quader mit den Kanten a, b, c entlang der braunen Flächendiagonalen der Grundflächen in zwei Teile, so entstehen zwei kongruente gerade Prismen

mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen.

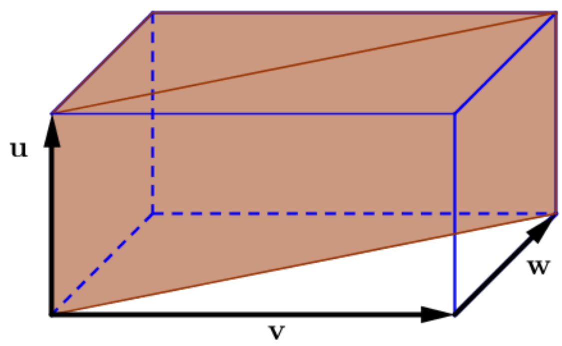


Abbildung 1.71: Prisma mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen

Die Seitenlängen der Dreiecke der Grundflächen der beiden Prismen sind $a, b, \sqrt{a^2+b^2}$, d.h. die Grundflächen A_G berechnen sich zu

$$A_G = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Die Höhe h der Prismen ist

$$h = c.$$

Da das Volumen V des Quaders gleich

$$V = a \cdot b \cdot c$$

ist, hat jedes der beiden Prismen das Volumen

$$V_{Prisma} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2} = A_G \cdot h,$$

also wieder „Grundfläche mal Höhe". Die Oberfläche eines der beiden Prismen A_{Prisma} setzt sich zusammen aus den beiden dreieckigen Grundflächen und dem Mantel M, der aus drei rechteckigen Seitenflächen mit den Längen a, c und b, c sowie $\sqrt{a^2+b^2}, c$ besteht, also

$$M = a \cdot c + b \cdot c + \sqrt{a^2+b^2} \cdot c.$$

Für die Oberfläche des Prismas erhalten wir damit

$$A_{Prisma} = 2 \cdot A_G + M = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + a \cdot c + b \cdot c + \sqrt{a^2+b^2} \cdot c = a \cdot b + c\left(a + b + \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

2. Ein gerader Kreiszylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine Seite gedreht wird, diese Seite bildet dann die Achse des Kreiszylinders.

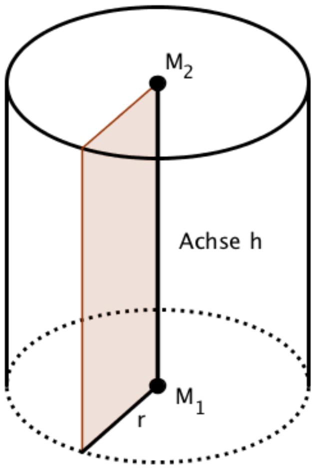


Abbildung 1.72: Zylinder als Rotation eines Rechtecks um eine Seite

Die Seiten des braunen Rechtecks sind in der Grafik mit r und $h = \overline{M_1 M_2}$ bezeichnet. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der beiden Grundflächenkreise und r ist der Radius des durch die Rotation entstandenen Kreiszylinders. Um die Oberfläche des Kreiszylinders zu berechnen stellen wir uns vor, dass wir den Mantel an der äußeren Seite des Rechtecks von oben nach unten zerschneiden und auf der einer Ebene ausrollen. Wir erhalten dann als Mantelfläche die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen h und $2\pi r$. Zur Oberfläche gehören auch die beiden Grundflächen

$$A_G = \pi r^2,$$

d.h. die Oberfläche des Kreiszylinders berechnet sich zu

$$A_{Zylinder} = 2 \cdot A_G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r\,(r + h)\,.$$

Um das Volumen des geraden Zylinders zu berechnen, stellen wir uns vor, dass anstelle des Zylinders ein gerades Prisma mit Höhe h und regelmäßigem n-Eck mit Umkreisradius r als Grundfläche vorliegt. Dessen Volumen kann man mit der Formel „Grundfläche mal Höhe" berechnen. Nun lassen wir die Anzahl der Ecken immer größer werden und erhalten - wie in Satz 1.73 gezeigt - eine immer bessere Annäherung der Prismagrundfläche an die Fläche eines Kreises mit dem Radius r. Mit anderen Worten: auch das Zylindervolumen $V_{Zylinder}$ berechnet sich durch „Grundfläche mal Höhe":

$$V_{Zylinder} = A_G \cdot h = \pi r^2 \cdot h.$$

□

Cavalierisches Prinzip

Um die Volumina für beliebige Prismen und Kreiszylinder zu berechnen, benutzen wir das sogenannte **Cavalierische Prinzip**.

Satz 1.82.
Köper mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiches Volumen, wenn alle in gleichen Höhen parallel zur Grundfläche gemachten Querschnitte inhaltsgleich sind. Speziell: Gerade und schiefe Prismen sowie gerade und schiefe Kreiszylinder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen:

$$V = A_G \cdot h.$$

□

Beispiel 1.83. Volumen von Prisma und Zylinder

1. Wie groß ist das Volumen eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas mit der Seitenlänge $a = 3\,cm$ und der Höhe $h = 4\,cm$?
   Lösung: Zunächst berechnen wir den Inhalt der Grundfläche, d.h. des gleichseitigen Dreiecks. Nach Beispiel 1.55 errechnet sich die Höhe im gleichseitigen Dreieck zu
   $$h_D = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$
   d.h. der Flächeninhalt ist
   $$A_G = \frac{a}{2} \cdot h_D = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$
   und für das Volumen folgt
   $$V_{Prisma} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} \cdot 4 = 9\sqrt{3} = 15,59\,cm^2.$$

2. Wie groß ist das Volumen eines schiefen Kreiszylinders mit Radius r und Achsenlänge $s = 3r$, wenn die Achse und die Grundfläche einen Winkel von 60° einschließen?
   Lösung: Wir betrachten folgende Abbildung:

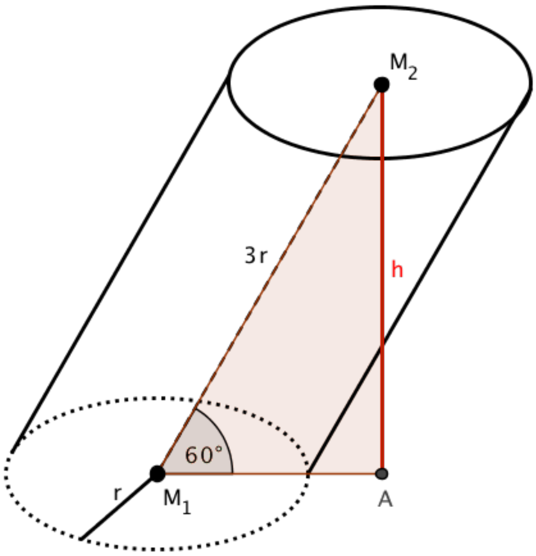


Abbildung 1.73: Schiefer Zylinder

Zu berechnen ist die rot eingezeichnete Höhe des Zylinders, die gleichzeitig eine Kathete des braunen rechtwinkligen Dreiecks M_1AM_2 ist. Die Strecke

$$\overline{M_1M_2} = 3r$$

ist die Hypotenuse, also folgt mit Beispiel **??** auf Seite ??

$$\frac{h}{3r} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d.h. es ergibt sich

$$h = \frac{3r\sqrt{3}}{2}$$

und daraus

$$V_{Zylinder} = \pi r^2 \cdot h = \frac{3\pi r^3\sqrt{3}}{2}.$$

□

Hohlzylinder

Definition 1.84.
Schneidet man aus einem geraden Kreiszylinder mit Radius r_1 und Höhe h einen Kreiszylinder mit kleinerem Radius r_2 heraus, so entsteht ein gerader **Hohlzylinder** mit der **Wandstärke** $r_1 - r_2$.

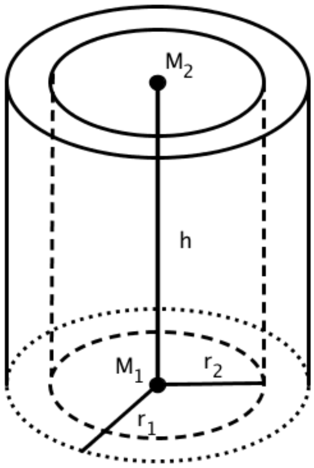


Abbildung 1.74: Hohlzylinder

Satz 1.85. ***Oberfläche und Volumen von Hohlzylindern***
Die Grundflächen eines Hohlzylinders sind kongruente Kreisringe, deren Flächeninhalte sich jeweils zu

$$A_G = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

berechnen. Die Mantelfläche setzt sich zusammen aus dem äußeren und inneren Mantel

$$M = M_a + M_i = 2\pi r_1 \cdot h + 2\pi r_1 \cdot h = 2\pi h \left(r_1 + r_2\right).$$

Für die Oberfläche des Hohlzylinders folgt daraus

$$A_{Hohlzylinder} = 2\left(\pi r_1^2 - \pi r_2^2\right) + 2\pi h \left(r_1 + r_2\right) = 2\pi \left(r_1^2 - r_2^2 + h\left(r_1 + r_2\right)\right).$$

Das Volumen eines Hohlzylinders lässt sich einfach berechnen. Wir ziehen von dem Volumen des größeren Hohlzylinders das des kleineren ab und erhalten

$$V_{Hohlzylinder} = \pi r_1^2 \cdot h - \pi r_2^2 \cdot h = \pi h \left(r_1^2 - r_2^2\right).$$

Beispiel 1.86. Kreis- und Hohlzylinder
Ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius r und der Höhe $h_K = 2r$ soll das gleiche Volumen haben wie ein Hohlzylinder mit der Höhe $h_H = 3r$ und dem kleineren Radius $r_2 = r$. Welchen Wert hat r_1?
Lösung: Das Volumen des Vollzylinders ist

$$V_{Zylinder} = \pi r^2 \cdot h_K = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Da der Hohlzylinder das gleiche Volumen haben soll, lautet die Bestimmungsgleichung für r_1:

$$2\pi r^3 = V_{Hohlzylinder} = \pi h_H \left(r_1^2 - r_2^2\right) = \pi 3r \left(r_1^2 - r^2\right).$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu

$$2r^2 = 3\left(r_1^2 - r^2\right),$$

woraus

$$r_1 = r\sqrt{\frac{5}{3}}$$

folgt.

1.6.3 Pyramide und Kegel

Definition 1.87.

1. Eine **Pyramide** ist ein Polyeder, das von einem n-Eck als Grundfläche und n Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird. Die von den Eckpunkten der Grundfläche ausgehenden und die Dreiecke begrenzenden Kanten treffen sich in einem Punkt, der **Spitze** der Pyramide genannt wird. Der Abstand der Grundfläche zur Spitze heißt **Höhe** der Pyramide. Hat die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen, so ist sie **gerade**, andernfalls **schief**. **Regelmäßige** Pyramiden haben regelmäßige n-Ecke als Grundfläche, **unregelmäßige** nicht. Die Summe der Seitenflächen der Pyramide bilden den **Mantel** und die Kantenabschnitte zwischen den Ecken der Grundflächen und der Spitze sind die **Seitenkanten** der Pyramide.

2. Ein **Kreiskegel** (kurz **Kegel**) ist ein krummlinig begrenzter Körper mit einer Kreisfläche als Grundfläche und einer gekrümmten Mantelfläche, die an der Grundfläche der Krümmung der Kreislinie folgt und andererseits in einer **Spitze** zusammenläuft. Steht die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises, so ist der Kegel **gerade**, andernfalls **schief**. Den Abstand der Grundfläche zur Spitze nennt man **Höhe** des Kegels. Die Verbindungslinien von der Spitze bis zur Grundkante heißen **Mantellinien**. Sind diese alle gleich lang, so ist der Kegel gerade.

Beispiel 1.88. Quadratische Pyramide und Kreiskegel

1. Die berühmten Grabstätten der altägyptischen Könige sind gerade quadratische Pyramiden.

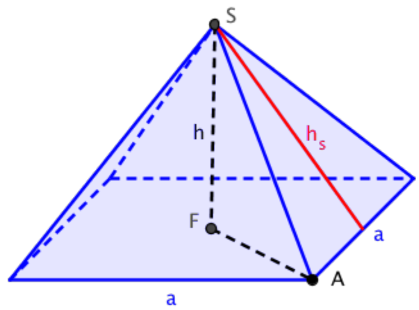


Abbildung 1.75: Pyramide mit quadratischer Grundfläche

Die größte und bekannteste Pyramide ist die Cheops Pyramide bei Gizeh. Sie hat eine Grundkante von ca. $230\,m$ Länge und eine Höhe von ca. $137\,m$.
Wir wollen die Oberfläche einer quadratischen Pyramide mit Grundseitenlänge a und Höhe h berechnen und schauen uns dazu die Abbildung genauer an. Das Dreieck ASF, wobei F den Fußpunkt des Lotes von der Spitze S auf die Grundfläche bezeichne, ist rechtwinklig mit den Katheten h und $\overline{FA}$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$\overline{FA} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Die Seitenkante $\overline{AS}$ hat also die Länge

$$\overline{AS} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

Die vier Seitendreiecke sind gleichschenklig mit der Basisseite a und der Schenkellänge (gleich Seitenkantenlänge)

$$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

Um den Flächeninhalt eines Seitendreiecks zu berechnen stellen müssen wir die rote Höhe h_s auf die Basisseite a herleiten. Wieder mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$h_s = \sqrt{\left(\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

und daraus für die Fläche A_s eines Seitendreiecks

$$A_s = \frac{a}{2}\,h_s = \frac{a}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Die Gesamtoberfläche A der Pyramide ist dann

$$A = a^2 + 4A_s = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Wenn wir die Zahlen der Cheops Pyramide einsetzen, so erhalten wir

$$A = 230^2 + 2 \cdot 230\sqrt{137^2 + \frac{230^2}{4}} = 135.179,59\,qm.$$

2. Ein gerader Kreiskegel entsteht, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten rotieren lässt.

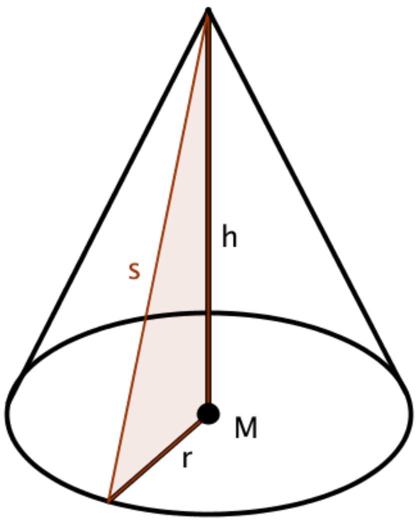


Abbildung 1.76: Kegel als Rotation eines Dreiecks um eine Kathete

Die Abbildung zeigt ein braunes rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und r, das um die Seite h rotiert wird und einen geraden Kegel mit der Grundfläche πr^2 und Höhe h erzeugt. Wenn wir die Oberfläche des Kegels berechnen wollen, so stellen wir uns vor, wir schneiden den Kegel entlang der braunen Mantellinie s auf und legen die Mantelfläche auf die Grundebene. Wir erhalten dann einen Kreissektor, dessen Radius gleich der Länge der Mantellinie s ist und dessen Bogen die Länge $2\pi r$ des Grundkreisumfangs hat. Zu diesem müssen wir dann noch die Fläche A_G des Grundkreises addieren. Die braune Mantellinie s hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Um den Flächeninhalt der Mantelfläche (des Kreissektors) auszurechnen benutzen wir die Relation

$$M : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s,$$

d.h. die Kreissektorfläche verhält sich zur Gesamtfläche des Kreises wie die Bogenlänge zum Gesamtumfang. Aus der letzten Gleichung erhalten wir

$$M = \frac{2\pi r}{2\pi s} \cdot \pi s^2 = \pi r s = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Für die Gesamtoberfläche A des Kegels folgt daraus

$$A = A_G + M = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r \left(r + \sqrt{r^2 + h^2} \right).$$

Zur Berechnung des Volumens von beliebigen Pyramiden und Kegel benutzen wir wieder das Cavalierische Prinzip.

Satz 1.89. ***Cavalieri***
Gerade und schiefe Pyramiden sowie gerade und schiefe Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen.
Da man jedes unregelmäßige gerade dreiseitige Prisma mit Grundfläche A_G und Höhe h in drei volumensgleiche dreiseitige Pyramiden mit Grundfläche A_G und Höhe h aufteilen kann (siehe z.B. [?]), folgt für das Volumen V_P einer dreiseitigen Pyramide mit Grundfläche A_G und Höhe h:

$$V_P = \frac{1}{3}\, A_G \cdot h. \tag{1.6}$$

Diese Formel gilt für jede beliebige n-seitige Pyramide, denn jedes n-Eck als Grundfläche einer Pyramide kann in ein flächengleiches Dreieck verwandelt werden. Da wir den Kegel als regelmäßige Pyramide mit „unendlich vielen Ecken" auffassen können, gilt auch für das Volumen V_K eines Kegels mit Grundfläche πr^2 und Höhe h:

$$V_K = \frac{1}{3}\, A_G \cdot h = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \cdot h.$$

Beispiel 1.90. Tetraeder
Wie groß sind die Oberfläche und das Volumen eines Tetraeders mit Kantenlänge a?
Lösung: Ein **Tetraeder** ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide mit vier gleichseitigen Dreiecken als Begrenzungsflächen. Nun gilt nach Beispiel 1.55 für die Höhe h_G des Grundflächendreiecks

$$h_G = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

d.h. der Flächeninhalt A_G der Grundseite beträgt

$$A_G = \frac{a}{2} \cdot h_G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Die Oberfläche A des Tetraeders besteht aus vier kongruenten Dreiecken, also folgt

$$A = a^2\sqrt{3}.$$

Für die Berechnung des Volumens V benutzen wir die Formel

$$V = \frac{1}{3}\, A_G \cdot h,$$

d.h. wir müssen die Höhe h des Tetraeders bestimmen. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung des gleichseitigen Grunddreiecks.

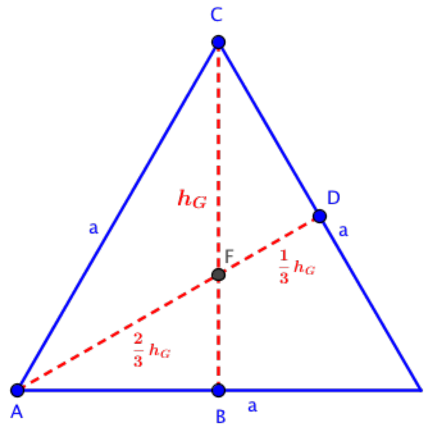


Abbildung 1.77: Grundflächendreieck eines Tetraeders

Eingezeichnet sind zwei rot gestrichelte Höhen der Länge

$$h_G = \overline{AD} = \overline{BC},$$

die sich im Punkt F schneiden. Der Punkt F ist der Lotfußpunkt der gesuchten Höhe h des Tetraeders. Da die Höhen im gleichseitigen Dreieck gleich den Seitenhalbierenden sind, schneiden sie sich im Verhältnis 2 : 1, d.h. es gilt

$$\overline{AF} : \overline{FD} = 2 : 1.$$

Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ ist gleich h_G, woraus

$$\overline{AF} = \frac{2}{3}\, h_G = \frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

folgt. Nun stellen wir uns vor, dass die Höhe h des Tetraeders an dem Punkt F aus dem Papier heraus zeigt und der Endpunkt der Höhe sich mit dem Endpunkt einer im Punkt A schräg angesetzten Kante der Länge a schneidet. Dann bilden die Strecke $\overline{AF}$, die Höhe h und die in A angesetzte Kante ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a und den Katheten h und $\overline{AF}$. Mit dem Satz des Pythagoras können wir daraus die Höhe h bestimmen:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wir setzen die Werte in die Volumensformel ein und erhalten

$$V = \frac{1}{3}\, A_G \cdot h = V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Beispiel 1.91. Volumen eines Kegels
Wie groß ist das Volumen eines geraden Kegels, dessen Grundkreis den Radius r hat und

dessen Schnittfläche mit einer senkrecht zur Grundfläche stehenden Ebene durch seine Spitze und den Mittelpunkt des Grundkreises ein gleichseitiges Dreieck ergibt?
Lösung: Das gleichseitige Dreieck hat die Seitenlänge $2r$. Die Höhe h des Kegels muss gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks sein, d.h.

$$h = h_{Dreieck} = \frac{2r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}.$$

Mit der Volumensformel für den Kegel folgt daraus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$

1.6.4 Kugel und Kugelteile

Definition 1.92.

1. Eine **Kugel** ist ein krummlinig begrenzter Körper mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt der Oberfläche den gleichen Abstand zu einem Punkt M hat, der **Mittelpunkt** der Kugel genannt wird. Den Abstand zwischen Mittelpunkt und Oberfläche ist der **Radius** der Kugel. Man kann eine Kugel auch dadurch charakterisieren, dass sie durch Rotation einer Halbkreisfläche um ihren Durchmesser entsteht.

2. Jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Ebene ist eine **Symmetrieebene**. Die Schnittfläche von Kugel und Ebene nennt man **Großkreis**. Der Radius des Großkreises stimmt mit dem Radius der Kugel überein. In nachfolgender Abbildung sind zwei gestrichelte Großkreise eingezeichnet.

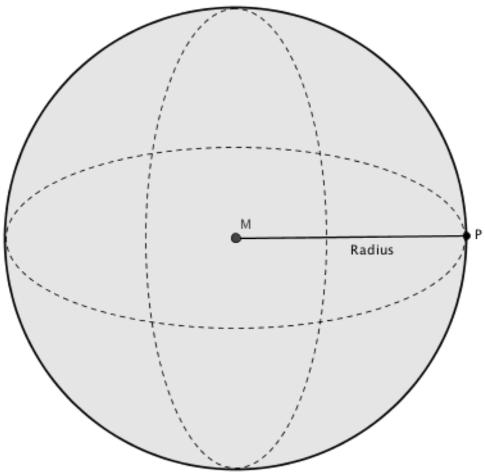


Abbildung 1.78: Kugel mit Großkreisen

Alle anderen Ebenen, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, erzeugen ebenfalls Kreise als Schnittflächen; diese sind allerdings kleiner als die Großkreise.

3. Jede Schnittebene teilt die Kugel in zwei **Kugelsegmente** und die Kugeloberfläche in zwei **Kugelkappen**. Geht die Schnittebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so entstehen zwei **Halbkugeln** als Sonderfall des Kugelsegments.

Satz 1.93. ***Volumen der Kugel und des Kugelsegments***
Um das Kugelvolumen zu berechnen benutzen wir das Cavalierische Prinzip und zeigen, dass das Volumen einer Halbkugel mit Radius r dem Restvolumen eines Zylinders mit Grundfläche πr^2 und Höhe r entspricht, wenn aus dem Zylinder ein gerader Kreiskegel mit Grundfläche πr^2 und Höhe r ausgebohrt wurde. Die folgende Abbildung illustriert diesen Sachverhalt.

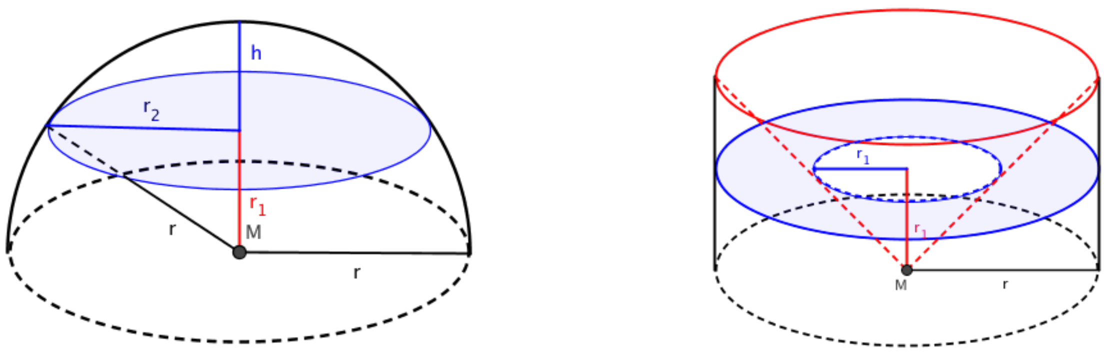


Abbildung 1.79: Volumen einer Halbkugel

Auf der linken Seite sehen wir die Halbkugel mit Radius r und auf der rechten Seite den schwarzen Zylinder mit Grundfläche πr^2 aus dem der rote Kegel entfernt wurde. Linke und rechte Seite haben beide die Höhe r und wenn wir zeigen, dass jeder zu den Grundflächen parallele Schnitt durch die beiden Körper den gleichen Flächeninhalt aufweist, dann sind die Volumina nach dem Satz von Cavalieri in beiden Figuren gleich. In beiden Körpern sind in der gleichen roten Höhe r_1 Ebenen eingezogen, die die blau schraffierten Schnittflächen erzeugen. In der Halbkugel ist das ein Schnittkreis mit Radius r_2 der sich mit dem Satz des Pythagoras zu

$$r_2 = \sqrt{r^2 - r_1^2}$$

berechnet. Der linke Schnittkreis hat also die Fläche

$$A_{links} = \pi r_2^2 = \pi \left(r^2 - r_1^2\right).$$

Die Schnittfläche auf der rechten Seite ist ein Kreisring mit dem äußeren Radius r und dem inneren Radius r_1. Das Letztere folgt aus der Gleichheit von Höhe und Radius im Kegel, d.h.

$$h : r = 1$$

und diese Relation erhält sich nach dem Strahlensatz auch für das Verhältnis von r_1 *und dem inneren Radius, d.h.*

$$r_1 : r_{innerer\,Radius} = 1 \Rightarrow r_{innerer\,Radius} = r_1.$$

Die Fläche des Kreisringes ist damit

$$A_{rechts} = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi \left(r^2 - r_1^2\right).$$

Also sind die beiden Schnittflächen und damit auch die Volumina der beiden Körper gleich:

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder\,ohne\,Kegel} = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

woraus für das Gesamtvolumen einer Kugel

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

folgt. Mit ganz ähnlichen Argumenten kann man zeigen, dass das Volumen eines Kugelsegments mit der blauen Höhe h *(siehe linke Grafik) gleich*

$$V_{Kugelsegment} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

ist. Da für den Radius r_2 *des Schnittkreises*

$$r_2^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2hr - h^2$$

gilt, woraus nach Multiplikation mit 3 *und Umstellen*

$$6hr - 2h^2 = 3r_2^2 + h^2$$

folgt, können wir das Volumen eines Kugelsegments auch durch den Radius des Schnittkreises r_2 *und durch die Höhe* h *ausdrücken:*

$$V_{Kugelsegment} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi h}{6}\left(3r_2^2 + h^2\right).$$

Beispiel 1.94. Kugelvolumen

1. In welchem Verhältnis stehen die Volumina von Kugel, Zylinder und Kegel, wenn sie jeweils die Grundfläche πr^2 und die Höhe r haben?
   Lösung: Für die Volumina gilt:

$$\begin{aligned} V_{Kugel} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ V_{Zylinder} &= \pi r^2 \cdot r = \pi r^3 \\ V_{Kegel} &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

   Also ist das Verhältnis

$$V_{Kugel} : V_{Zylinder} : V_{Kegel} = 4 : 3 : 1.$$

2. Die Differenz der Volumina zweier Kugeln, von denen die größere den Radius $4\,cm$ hat, sei $20\,cm^3$. Wir groß ist der Radius der kleineren Kugel?
Lösung: Für den Radius r der kleineren Kugel gilt folgende Bestimmungsgleichung
$$V_{grössere\,Kugel} - V_{kleinere\,Kugel} = 20 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 - \frac{4}{3}\pi r^3,$$
woraus durch Vereinfachen
$$\frac{20 \cdot 3}{4\pi} = 64 - r^3$$
folgt. Auflösen nach r ergibt
$$r = \sqrt[3]{64 - \frac{15}{\pi}} = 3,9\,cm.$$

Satz 1.95. ***Oberfläche von Kugel und Kugelkappe***
Zerlegt man eine Kugel in eine sehr große Anzahl sehr kleiner Pyramiden, die alle als Spitze die Kugelmitte haben, d.h. deren Höhe jeweils der Radius der Kugel ist, so nähert sich die Summe ihrer Grundflächen A_G der Oberfläche der Kugel und die Summe ihrer Volumina dem Volumen der Kugel. Mit der Volumenberechnungsformel für Pyramiden (1.6) folgt
$$V_{aller\,Pyramiden} = \frac{1}{3}A_G r \approx \frac{4}{3}\pi r^3 = V_{Kugel},$$
woraus sich wegen
$$A_G \approx A_{Kugel}$$
für die Oberfläche der Kugel die Beziehung
$$A_{Kugel} = 4\pi r^2$$
ableitet. Für die Oberfläche einer Kugelkappe mit Höhe h erhält man analog
$$A_{Kugelkappe} = 2\pi r \cdot h.$$

Beispiel 1.96. Oberfläche einer Kugel
Wie groß ist der Radius einer Kugel, deren Oberfläche gleich der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius r_z und der Höhe $h = 7r_z$ ist?
Lösung: Die Oberfläche eines Zylinders setzt sich aus den beiden Grundflächen und dem Mantel zusammen
$$A_{Zylinder} = 2\pi r_z^2 + 2\pi r_z \cdot h = 2\pi r_z^2 + 2\pi r_z \cdot 7r_z = 16\pi r_z^2.$$
Damit ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den Kugelradius
$$A_{Kugel} = 4\pi r^2 = A_{Zylinder} = 16\pi r_z^2,$$
also
$$r = 4r_z.$$

Aufgaben zu Abschnitt 1.6

Quader und Würfel

1. Wie kann man das Volumen eines Würfels durch seine Oberfläche ausdrücken?

2. Stellen Sie Formeln für das Volumen und die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge a auf, die nur auf der Raumdiagonalen $d = a\sqrt{3}$ basieren.

3. Die Oberflächen eines Würfels mit der Kantenlänge $5\,cm$ und eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 4\,cm$ und $b = 3\,cm$ sollen gleich sein. Wie groß ist die dritte Kante c des Quaders?

4. Die Volumina eines Würfels mit der Kantenlänge $5\,cm$ und eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 4\,cm$ und $b = 3\,cm$ sollen gleich sein. Wie groß ist die dritte Kante c des Quaders?

5. Die Raumdiagonale d eines Quaders soll doppelt so groß sein wie die Flächendiagonale $f_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 5\,cm$. Berechnen Sie die Kanten b und c, wenn $a = 4\,cm$ ist.

Prisma und Zylinder

1. Ein regelmäßiges vierseitiges Prisma hat das Volumen $V = 36\,cm^3$ und die Höhe $h = 4\,cm$. Wie groß ist die Grundkante?

2. Bestimmen Sie die Höhe eines regelmäßigen geraden dreiseitigen Prismas, wenn die Grundkante a und das Volumen

$$V = \frac{a^3}{2}\sqrt{3}$$

   bekannt sind.

3. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche eines regelmäßigen geraden sechsseitigen Prismas mit der Grundkante a und der Höhe $h = 2a$.

4. Ein Zylinder hat das Volumen $V = 80\,cm^3$ und die Höhe $h = 4\,cm$. Wie groß ist der Radius der Grundfläche?

5. Das Volumen eines Zylinders mit Radius $4\,cm$ und Höhe $6\,cm$ soll das gleiche sein wie bei einem Zylinder, dessen Radius r sich zur Höhe h wie 1:2 verhält. Wie groß sind r und h?

6. Das Volumen eines Hohlzylinders soll das gleiche sein wie das des inneren Hohlraumes. In welchem Verhältnis steht der äußere Radius r_1 zum inneren Radius r_2?

Pyramide und Kegel

1. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer quadratischen Pyramide mit Grundkante $a = 5\,m$ und Höhe $h = 2a$.
2. In welchem Abstand von der Spitze einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit bekannter Höhe h muss eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt werden, damit das Volumen der über der Schnittfläche liegenden Pyramide im Verhältnis $1 : 3$ zum Volumen der ganzen Pyramide steht? Blatt
3. Eine kegelförmige Grube hat bei einem Böschungswinkel von 45° eine Tiefe von $10\,m$ erreicht. Wieviel Volumen wurde ausgegraben?
4. Die Schnittfläche durch die Achse eines geraden Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm und der Schenkellänge $s = 8\,cm$. Wir groß sind Volumen und Mantelfläche des Kegels?
5. Wie groß ist die Höhe eines Zylinders, der das gleiche Volumen und die gleiche Grundfläche wie ein Kegel mit der Höhe $h = 9\,cm$ hat?

Kugel und Kugelteile

1. Welchen Radius hat eine Kugel mit dem Volumen $V = 36\,cm^3$?
2. Welchen Radius hat eine Kugel mit der Oberfläche $A = 36\,cm^2$?
3. Eine Kugel mit dem Radius r_1 und ein Zylinder mit dem Radius r_2 und der Höhe $h = 2r_2$ haben die gleiche Oberfläche. In welchem Verhältnis stehen ihre Radien?
4. Einem Zylinder mit der Höhe $h = 2r$ und der Grundfläche πr^2 sind eine Kugel mit Radius r und ein Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe eingeschrieben. Bestimmen Sie das Verhältnis der drei Volumina zueinander.
5. Welches Volumen hat ein Kugelsegment mit Kappe $A = 50\,cm^2$ und Höhe $h = 1\,cm$? Welchen Radius hat die zum Segment gehörige Kugel?
6. Eine Kugel hat eine Kappe mit $A = 40\,cm^2$ und einer Höhe von $h = 1\,cm$. Berechnen Sie das Volumen der Kugel.

Lösungen der Aufgaben

Abschnitt 1.1

1.

   a) $171,887° = 3\,rad$

   b) $\pi/12 = 15°$

   c) $2,5 = 143°$

d) $38°14'22'' = 0,6674\,rad$.

2.

- Da man ein Fünfeck in drei Dreiecke aufteilen kann, beträgt die Winkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$
- Da man ein Sechseck in vier Dreiecke aufteilen kann, beträgt die Winkelsumme $4 \cdot 180° = 720°$
- Allgemein: Da man ein n-Eck in $n-2$ Dreiecke aufteilen kann, beträgt die Winkelsumme $(n-2) \cdot 180°$.

3. Aus der Abbildung liest man ab:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 90° - \alpha \\
\delta &= \alpha \\
\varepsilon &= 90° - \alpha \\
\zeta &= 90° - \beta \\
\eta &= \alpha + \beta \\
\theta &= 90° - \alpha - \beta.
\end{aligned}$$

Abschnitt 1.2

1. Zwei Kreise um die Endpunkte A und B mit gleichem Radius, der größer als $\frac{\overline{AB}}{2}$ ist, schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Die Verbindungsgerade von P_1 und P_2 ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit $\overline{AB}$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
2. Ein Kreis um den Scheitelpunkt des Winkels schneidet die beiden Schenkel g und h in den Punkten G und H. Die Mittelsenkrechte von $\overline{GH}$ ist die Winkelhalbierende.
3. Ein Kreis um den Punkt P schneidet die Gerade g in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist die Senkrechte in P zur Geraden g.
4. Ein Kreis um den Punkt P schneidet die Gerade g in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneidet die Strecke im Mittelpunkt M. Dann ist $\overline{PM}$ das Lot von P auf g.
5. Ein Kreis um den Punkt P schneidet die Gerade g in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneidet die Strecke im Mittelpunkt M. Sei h die Gerade durch P und M. Dann ist die Senkrechte in P zur Geraden h die gesuchte Parallele.

Abschnitt 1.3

1. Auf einem beliebig geneigten Strahl vom Endpunkt A der Strecke $\overline{AB}$ werden sechs gleiche Teile abgetragen. Der Endpunkt des letzten Teils sei C. Parallelen zu $\overline{BC}$ durch die übrigen Teilungspunkte des Strahls ergeben auf $\overline{AB}$ die geforderte Teilung.

2. Um den Endpunkt A der Strecke $c = \overline{AB} = 5\,cm$ wird ein Kreis mit Radius $b = 4\,cm$ und um B ein weiterer Kreis mit Radius $a = 3\,cm$ geschlagen. Die beiden Kreise schneiden sich im dritten Punkt C.

3. Auf einem Schenkel des Winkels $\gamma = 80°$ mit Scheitelpunkt C wird die Länge $a = 5\,cm$ bis zum Punkt B abgetragen. Ein Kreis um B mit Radius $c = 8\,cm$ schneidet den anderen Schenkel im dritten Punkt A.

4. Am Endpunkt A der Strecke $c = \overline{AB} = 7\,cm$ wird der Winkel $\alpha = 30°$ mit dem freien Schenkel b angetragen. Am Endpunkt B der Strecke wird der Winkel $\beta = 60°$ mit dem freien Schenkel a angetragen. Die beiden Schenkel schneiden sich im dritten Punkt C.

5. Nach dem zweiten Strahlensatz ist $\overline{SC} : \overline{SB} = \overline{CD} : \overline{AB}$, d.h.
$$\frac{\overline{SC}}{12 - \overline{SC}} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \overline{SC} = 7.$$

6. Auf einem Schenkel eines beliebigen Winkels werden jeweils vom Scheitelpunkt A aus die Strecken a und b abgetragen. Die Strecke c wird auf dem zweiten Schenkel von A aus abgetragen. Durch den Endpunkt von b wird die Parallele der Verbindungsstrecke der Endpunkte von a und c gezogen. Diese schneidet den zweiten Schenkel im Punkt X. Die Strecke $x = \overline{AX}$ ist nach dem ersten Strahlensatz die gesuchte Größe.

7. Auf einem beliebig geneigten Strahl vom Endpunkt A der Strecke $\overline{AB} = 12\,cm$ werden zwei Strecken $a = \overline{AC}$ und $b = \overline{CD}$ aufgetragen, die sich wie $4 : 5$ verhalten. Die Parallele zu $\overline{BD}$ durch den Punkt C schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im gesuchten Teilungspunkt.

8. Ist h die unbekannte Höhe des Endpunktes der Bahnstrecke, so gilt mit dem ersten Strahlensatz $h : 1450 = 1 : 50$, d.h. $h = 29\,m$.

9. Ist h die unbekannte Höhe des Turms, so gilt mit dem ersten Strahlensatz $h : 4 = 1,5 : 0,8$, d.h. $h = 7,5\,m$.

Abschnitt 1.4

1. Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ. Einbeschrieben in ABC sind der Inkreis mit Mittelpunkt M und das Berührdreieck $A_iB_iC_i$.

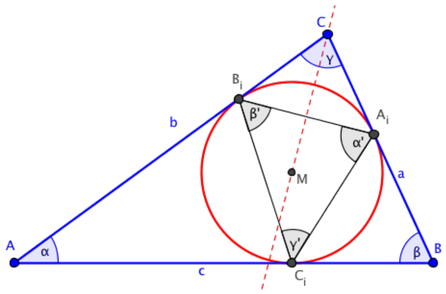


Abbildung 1.80: Abschnitt 1.4, Aufgabe 1

a) Da die Tangentenabschnitte gleich groß sind, gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\overline{AB_i} &= \overline{AC_i}\\ \overline{B_iC} &= \overline{CA_i}\\ \overline{A_iB} &= \overline{C_iB}.\end{aligned}$$

Für die Seitenlängen des Dreiecks ergeben sich daraus

$$\begin{aligned}b &= \overline{AB_i}+\overline{B_iC}\\ a &= \overline{CA_i}+\overline{A_iB}=\overline{B_iC}+\overline{A_iB}\\ c &= \overline{AC_i}+\overline{C_iB}=\overline{AB_i}+\overline{A_iB}\end{aligned}$$

Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&1&1&a\\1&1&0&c\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&1&1&a\\0&1&-1&c-b\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&1&1&a\\0&0&-2&c-b-a\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\dfrac{-a+b+c}{2}\\[2ex]0&1&0&\dfrac{a-b+c}{2}\\[2ex]0&0&1&\dfrac{a+b-c}{2}\end{array}\right),$$

also folgt

$$\begin{aligned}\overline{AB_i} &= \overline{AC_i}=\frac{-a+b+c}{2}\\ \overline{B_iC} &= \overline{CA_i}=\frac{a-b+c}{2}\\ \overline{A_iB} &= \overline{C_iB}=\frac{a+b-c}{2}.\end{aligned}$$

b) Da das Dreieck A_iCB_i gleichschenklig ist, steht die rot gestrichelte Winkelhalbierende senkrecht auf $\overline{A_iB_i}$. Daraus ergibt sich:

$$\angle CA_iB_i = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Ebenso erhält man:

$$\angle C_iA_iB = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\alpha' = 180° - \angle CA_iB_i - \angle C_iA_iB = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Analog ergibt sich

$$\beta' = \frac{\alpha+\gamma}{2}, \gamma' = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2. Die folgende Grafik zeigt die Schnittpunkte S_h der Höhen, S_m der Mittelsenkrechten und S_{sh} der Seitenhalbierenden und die Gerade, die diese Schnittpunkte verbindet

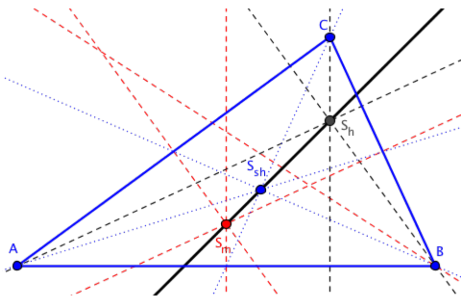


Abbildung 1.81: Die Schnittpunkte der Höhen, Mittelsenkrechten und Seitenhalbierenden liegen auf einer Geraden

3.

a) Die drei Teildreiecke haben die Flächeninhalte

$$F_1 = \frac{ra}{2}, F_2 = \frac{rb}{2}, F_3 = \frac{rc}{2},$$

so dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks durch

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{r}{2}(a+b+c)$$

berechnen lässt.

b) Die Katheten senkrecht aufeinander, d.h. der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt

$$F = \frac{ab}{2} = 24\,cm^2.$$

Die Länge der Seite c ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10\,cm.$$

Mit der Formel aus (a) erhält man daraus

$$r = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{48}{24} = 2\,cm.$$

4. $\sqrt{2}$ ist die Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge 1. $\sqrt{3}$ ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 2. $\sqrt{5}$ ist die Hypotenuse in einem Dreieck mit den Katheten mit en Längen 1 und 2.

5. Den Flächeninhalt F des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten $a = 3\,cm, b = 4\,cm, c = 5\,cm$ beträgt

   a) $F = \dfrac{ab}{2} = 6\,cm^2$ bzw.

   b) mit der Formel von Heron und $U = a + b + c = 12\,cm$:

$$F = \sqrt{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - a\right)\left(\frac{U}{2} - b\right)\left(\frac{U}{2} - c\right)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6\,cm^2.$$

6. Die Seite c wird mit der umgestellten Formel von Heron

$$16F^2 = 4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2$$

berechnet. Aus

$$16 \cdot 36 = 4 \cdot 25 \cdot 9 - \left(25 + 9 - c^2\right)^2$$

folgt $c = 4\,cm$.

7. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 9} = 5\,cm.$$

Der Flächeninhalt ist damit

$$F = \frac{ab}{2} = 7{,}5\,cm^2.$$

8. Verwandeln Sie ein zeichnerisch ein Rechteck mit den Seiten a und b in ein flächengleiches Quadrat:

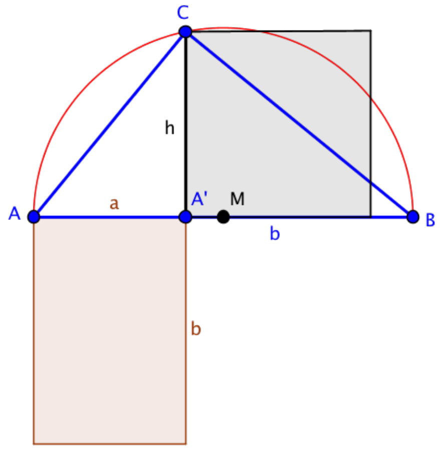


Abbildung 1.82: Flächengleiches Quadrat zu vorgegebenem Rechteck

Die Grafik zeigt das hellbraune Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Im Punkt A wird parallel zur Strecke $\overline{AA'}$ die Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge $a+b$ abgetragen. Um den Mittelpunkt M dieser Strecke ist der rote Thaleskreis gezeichnet. Die Senkrechte in A' zur Strecke $\overline{AB}$ schneidet den Thaleskreis im Punkt C. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig und die Strecke $h = \overline{A'C}$ ist die Höhe auf der Hypotenuse $\overline{AB}$. Das schwarze Quadrat mit der Seitenlänge h hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck, da nach dem Höhensatz $h^2 = a \cdot b$ gilt.

9.

   a) die Kathete errechnet sich mit dem Satz des Pythagoras zu

$$a = \sqrt{9,8^2 - 7,8^2} = 5,93296.$$

   b) die Hypotenuse errechnet sich mit dem Satz des Pythagoras zu

$$c = \sqrt{7,3^2 + 2,1^2} = 7,59605.$$

10. Der Flächeninhalt eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit den Schenkeln $a$ist

$$F = \frac{a^2}{2},$$

der eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge b

$$F = \frac{1}{2}\, b \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}.$$

Gleichsetzen und Auflösen nach b ergibt

$$b = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\, a.$$

11. In einem rechtwinkliges Dreieck stehen die Katheten senkrecht aufeinander, d.h. die angegebene Höhe ist eine der Katheten k_1. Die andere k_2 ergibt sich durch

$$F = \frac{k_1 k_2}{2}$$

zu

$$k_2 = \frac{24}{3} = 8\, cm.$$

Die Hypotenuse h ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras zu

$$h = \sqrt{8^2 + 3^2} = 8,544\, cm.$$

12. Für die Katheten gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4} b \Rightarrow a^2 = \frac{9}{16} b^2$$

und

$$a^2 + b^2 = 64 \Rightarrow \frac{9}{16} b^2 + b^2 = 64 \Rightarrow b = 6,4\, cm.$$

Also folgt

$$a = \frac{3}{4} b = 4,8\, cm$$

und

$$F = \frac{ab}{2} = 7,79\, cm^2.$$

13. Nach dem Kathetensatz gilt

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{cp} = \sqrt{(p+q)p} = \sqrt{40} = 6,32\, cm \\ b &= \sqrt{cq} = \sqrt{(p+q)q} = \sqrt{24} = 4,90\, cm \end{aligned}$$

und

$$F = \frac{ab}{2} = 15,48\, cm^2.$$

14. Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = p \cdot q \Rightarrow p = \frac{25}{3} = 8,33\, cm$$

und damit

$$c = p + q = 11,33\, cm.$$

Mit dem Kathetensatz folgt

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{cp} = \sqrt{11,33 \cdot 8,33} = 9,72\,cm \\
b &= \sqrt{cq} = \sqrt{11,33 \cdot 3} = 5,83\,cm.
\end{aligned}
$$

Die Fläche errechnet sich zu

$$F = \frac{ab}{2} = 28,33\,cm^2.$$

Abschnitt 1.5

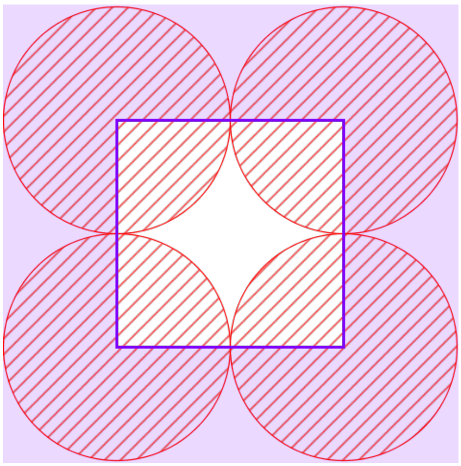
1. Ein Kreis mit dem Flächeninhalt $A_k = 20\,cm^2$ hat den Durchmesser

$$d = 2\sqrt{\frac{A_k}{\pi}} = 5,05\,cm.$$

2. Der Umfang U eines Kreises mit Flächeninhalt $A_k = 8\,cm^2$ ist

$$U = 2\sqrt{A_k \pi} = 10,03\,cm.$$

3. Die in das blaue Quadrat hineinragenden Kreisflächen sind jeweils $\frac{\pi r^2}{4}$ groß.



Damit ergibt sich für die gesuchte Fläche

$$F = a^2 - 4 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = a^2 - \pi r^2 = 3,43\,cm^2.$$

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche. Die Seitenlänge des blauen Quadrates sei $a = 4\,cm$.

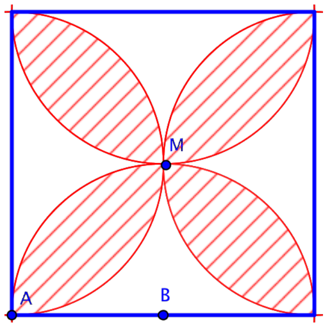


Abbildung 1.83: Abschnitt 1.5, Aufgabe 4

Die einbeschriebenen vier Halbkreise haben den Radius $\frac{a}{2}$. Die Strecke $\overline{AM}$ ist eine Sehne im Halbkreis mit dem Mittelpunkt B und hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Das Dreieck ABM hat den Flächeninhalt

$$F_D = \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}.$$

Der Kreisausschnitt mit dem Bogen AM ist ein Viertelkreis und hat den Flächeninhalt

$$F_K = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Der Sehnensektor, d.h. das Stück zwischen dem Kreisrand AM und dem Dreieck ABM, hat somit den Flächeninhalt

$$F_S = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{16}(\pi - 2).$$

Da es acht solche Sehnensektoren gibt, beträgt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche

$$F = 8F_S = \frac{a^2}{2}(\pi - 2) = 8\pi - 16 = 9,13\,cm^2.$$

5. Der Radius des Kreises errechnet sich durch

$$r = \frac{U}{2\pi} = \frac{15}{\pi} = 4,77\,m.$$

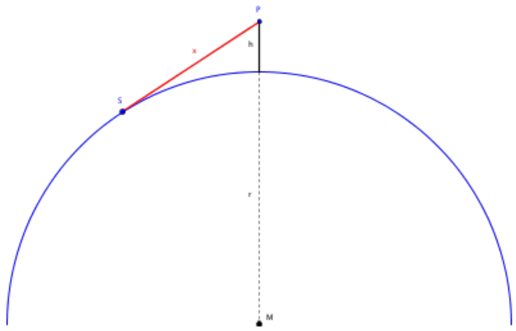
Die Länge der Sehne ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow s = 2\sqrt{r^2 - h^2} = 2\sqrt{22,8 - 4} = 8,67\,cm.$$

6. Die Mittelsenkrechten der beiden Sehnen s_1 und s_2 schneiden sich im gesuchten Mittelpunkt des Kreises.

7. Im Endpunkt A der gegebenen Sehne $s = \overline{AB}$ wird der Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ angetragen. Der freie Schenkel schneidet die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ im Punkt M. Der Winkel $\angle AMB$ ist nach Konstruktion 2α groß, somit ist M der gesuchte Mittelpunkt des Kreises.

8. Die nachfolgende Grafik erläutert die Aufgabenstellung:



Gesucht ist die Länge der Strecke $x = \overline{PS}$. Nach dem Sekantentangentensatz folgt mit $h = 400\,m$ und $r = 6.367\,km$

$$x^2 = h\,(2r + h) \Rightarrow x = \sqrt{h\,(2r + h)} = \sqrt{0,4 \cdot 12.734,4} = 71,31\,km.$$

9. Im Schnittpunkt S der Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ mit der Geraden g wird auf der Geraden g die Strecke mit der Länge $\sqrt{\overline{AS} \cdot \overline{BS}}$ und dem Endpunkt C abgetragen. Der gesuchte Kreis ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

10. Die Abbildung zeigt das Tangentenviereck $ABCD$ mit den jeweilen Lotfußpunkten von M auf die Vierecksseiten.

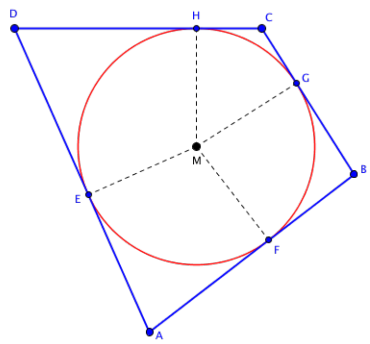


Abbildung 1.84: Tangentenviereck $ABCD$

a) Für die Flächeninhalte der Dreiecke gilt

$$\begin{aligned} F_{ABM} &= \overline{AB} \cdot \frac{r}{2} \\ F_{DCM} &= \overline{DC} \cdot \frac{r}{2} \\ F_{BCM} &= \overline{BC} \cdot \frac{r}{2} \\ F_{DAM} &= \overline{AD} \cdot \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Also folgt wegen $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{AD}$

$$F_{ABM} + F_{DCM} = F_{BCM} + F_{DAM}.$$

b) Der Flächeninhalt des Tangentenvierecks ist gleich

$$F_T = F_{ABM} + F_{DCM} + F_{BCM} + F_{DAM} = \frac{r}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AD}\right) = r \cdot \frac{U}{2}.$$

11. Welchen Flächeninhalt hat das in nachfolgender Abbildung dargestellte Bogendreieck. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit Seitenlänge a. Die Punkte A, B, C sind die Mittelpunkte der Kreisbögen.

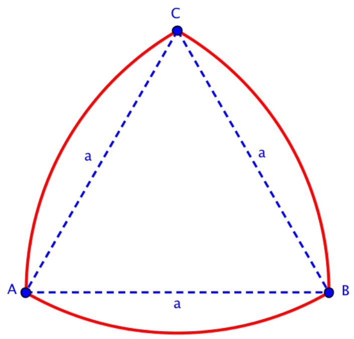


Abbildung 1.85: Abschnitt 1.5, Aufgabe 11

Die Fläche F_1 zwischen dem Kreisbogen und einer Dreiecksseite berechnet sich als Differenz eines Kreisausschnitts mit dem Radius a und dem Winkel $60° = \frac{\pi}{6}$ und dem Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks zu

$$F_1 = \frac{\pi}{6}\,a^2 - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}\,a^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Die Gesamtfläche F ist dann

$$\begin{aligned} F &= 3F_1 + F_{ABC} = 3a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) + \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) \approx 0,7a^2 \end{aligned}$$

12. Die Aufgabenstellung wird durch nachfolgende Abbildung erläutert.

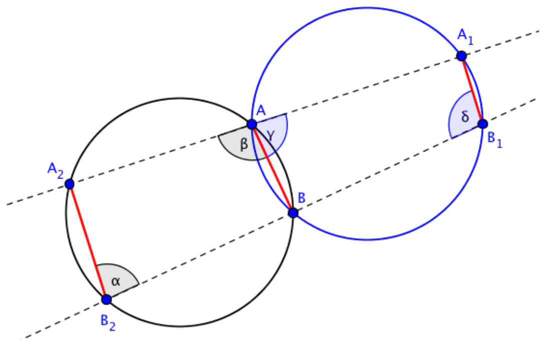


Abbildung 1.86: Abschnitt 1.5, Aufgabe 12

Die Vierecke B_2BAA_2 und BB_1A_1A sind Sehnenvierecke, daher gilt

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180° \\ \gamma + \delta &= 180°. \end{aligned}$$

Da auch

$$\beta + \gamma = 180°$$

ist, folgt $\beta = \delta$ und daraus

$$\alpha + \delta = 180°,$$

d.h. α und δ sind Ergänzungswinkel am Parallelenpaar $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$.

Abschnitt 1.6

Quader und Würfel

1. Gegeben ist die Oberfläche

$$A = 6a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{A}{6}}$$

eines Würfels mit der Kantenlänge a. Das Volumen eines Würfels berechnet sich durch

$$V = a^3 = \left(\sqrt{\frac{A}{6}}\right)^3 = \sqrt{\left(\frac{A}{6}\right)^3}.$$

2. Gegeben sei die Raumdiagonale

$$d = a\sqrt{3}.$$

Daraus folgt

$$a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

und daraus

$$\begin{aligned} A &= 6a^2 = 6\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2d^2 \\ V &= a^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{d^3}{9}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Die Oberfläche A_{Quader} des Quaders berechnet sich durch

$$A_{Quader} = 2\,(ab + ac + bc) = 2\,(12 + 4c + 3c) = 24 + 14c.$$

Da die beiden Oberflächen gleich sind, gilt

$$A_{Würfel} = 6 \cdot 5^2 = 150 = 24 + 14c,$$

woraus

$$c = \frac{126}{14} = \frac{63}{9} = 7\,cm$$

folgt.

4. Das Volumen des Quaders berechnet sich durch

$$V_{Quader} = a \cdot b \cdot c = 12c.$$

Da die beiden Volumina gleich sind, gilt

$$V_{Würfel} = 5^3 = 125 = 12c,$$

woraus

$$c = \frac{125}{12} = 10,42\,cm$$

folgt.

5. Die Flächendiagonale ist mit $a = 4\,cm$

$$f_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + b^2} = 5,$$

woraus

$$b = \sqrt{25 - 16} = 3\,cm$$

folgt. Ferner gilt

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{16 + 9 + c^2} = 2f_1 = 10,$$

woraus

$$c = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$$

folgt.

Prisma und Zylinder

1. Für das Volumen eines regelmäßigen vierseitigen Prisma gilt
$$V = A_G \cdot h = a^2 \cdot h,$$
woraus
$$a = \sqrt{\frac{V}{h}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3\,cm$$
folgt.

2. Die Grundfläche des Prismas ist die eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a, also
$$A_G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$
Da das Volumen sich durch
$$V = A_G \cdot h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h$$
berechnet und
$$V = \frac{a^3}{2}\sqrt{3}$$
vorgegeben ist, folgt
$$h = 2a.$$

3. Da ein regelmäßiges Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke zerlegt werden kann, gilt für die Grundfläche des Prismas
$$A_G = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}.$$
Also folgt für das Volumen
$$V = A_G \cdot h = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} \cdot 2a = 3a^3\sqrt{3}.$$
Da der Mantel des Prismas aus 6 Rechtecken mit den Seitenlängen a und h besteht, ergibt sich
$$A_{Mantel} = 6ah = 6a\,(2a) = 12a^2$$
und somit für die Oberfläche
$$A = 2A_G + A_{Mantel} = 3a^2\sqrt{3} + 12a^2 = 3a^2\left(\sqrt{3} + 4\right).$$

4. Das Volumen eines Zylinders berechnet sich durch
$$V = \pi r^2 h$$

und nach Vorgabe ist $V = 80\,cm^3$ und die Höhe $h = 4\,cm$. Also folgt

$$80 = 4\pi r^2,$$

woraus sich

$$r = \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2,5\,cm$$

ergibt.

5. Das Volumen des Zylinders mit Radius $4\,cm$ und Höhe $6\,cm$ berechnet sich zu

$$V = \pi\left(4^2\right) \cdot 6 = 96\pi.$$

Für das Volumen des zweiten Zylinders gilt

$$V = 96\pi = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{48} = 3,63\,cm \\ h &= 2r = 7,26\,cm. \end{aligned}$$

6. Das Volumen eines Hohlzylinders berechnet sich durch

$$V = \pi h\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

und das des inneren Hohlraum durch

$$V = \pi h r_2^2.$$

Gleichsetzen führt zu

$$\pi h\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \pi h r_2^2.$$

Durch Vereinfachen erhalten wir

$$r_1^2 = 2r_2^2$$

und daraus

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

Pyramide und Kegel

1. Das Volumen der Pyramide berechnet sich durch

$$V = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}a^2\,(2a) = \frac{2}{3}a^3.$$

Um die Fläche der vier kongruenten Seitendreiecke zu berechnen, ermitteln wir zunächst die Höhe h_a der Dreiecke bezgl. der Grundkante a der Pyramide mit dem Satz des Pythagoras:

$$h_a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{17}.$$

Die Dreiecksfläche ist damit

$$A_{Dreieck} = \frac{a}{2}\, h_a = \frac{a^2}{4}\sqrt{17}$$

und für de gesamte Oberfläche folgt

$$A = A_G + 4A_{Dreieck} = a^2 + a^2\sqrt{17} = a^2\left(1 + \sqrt{17}\right).$$

2. Sei a die Grundkante der Pyramide mit der Höhe h. Dann folgt mit dem Strahlensatz für die Grundkante a' und für die gesuchte Höhe h' der abgeschnittenen Pyramide

$$a : h = a' : h',$$

also

$$a' = \frac{ah'}{h}.$$

Wir bilden das Verhältnis der Volumina der beiden Pyramiden und wissen, dass

$$\frac{V_{abgeschnitten}}{V} = \frac{1}{3}$$

ist. Einsetzen ergibt

$$\frac{\frac{1}{3}\, a'^2 h'}{\frac{1}{3}\, a^2 h} = \frac{\left(\frac{ah'}{h}\right)^2 h'}{a^2 h} = \frac{h'^3}{h^3} = \frac{1}{3},$$

woraus

$$h' = h\,\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

folgt.

3. Da die Mantellinie eine Neigung von 45° hat, ist ein rechtwinkliges Dreieck, das von einem Punkt auf der Grundkreislinie, dem Mittelpunkt der Grundkreises und der Spitze gebildet wird, gleichschenklig mit der Mantellinie als Hypotenuse. D.h. die Höhe des Kegels ist gleich dem Radius des Grundkreises $r = h = 10\,m$. Somit können wir das Volumen ausrechnen:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1000}{3}\pi = 1.047,2\,m^3.$$

4. Es gilt für den Radius des Grundkreises

$$r = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Also folgt für das Volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(s^2 - h^2\right)h = \frac{48 \cdot 4}{3}\pi = 64\pi = 201\,cm^3$$

und für die Mantelfläche

$$A_{Mantel} = \pi r \cdot s = \pi 4\sqrt{3} \cdot 8 = 32\pi\sqrt{3} = 174,1\,cm^2.$$

5. Für das Volumen des gesuchten Zylinders gilt

$$V = \pi r^2 h_z.$$

Dieses soll gleich dem Volumen des Kegels mit Radius r und Höhe $h = 9\,cm$ sein. Also ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für h_z:

$$\pi r^2 h_z = \frac{1}{3}\pi r^2\, 9,$$

also

$$h_z = 3\,cm.$$

Kugel und Kugelteile

1. Der Radius einer Kugel mit dem Volumen $V = 36\,cm^3$ ergibt sich aus

$$36 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

zu

$$r = \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{27}{\pi}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 2,05\,cm.$$

2. Der Radius einer Kugel mit der Oberfläche $A = 36\,cm^2$ ergibt sich aus

$$36 = 4\pi r^2$$

zu

$$r = \sqrt{\frac{36}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}} = 3\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1,69\,cm.$$

3. Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r_1

$$A_{Kugel} = 4\pi r_1^2$$

ist gleich der Oberfläche eines Zylinder mit dem Radius r_2 und der Höhe $h = 2r_2$

$$A_{Zylinder} = 2\pi r_2^2 + 2\pi r_2 \cdot 2r_2 = 6\pi r_2^2.$$

Gleichsetzen und Vereinfachen ergibt

$$2r_1^2 = 3r_2^2,$$

woraus

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

folgt.

4. Für die Volumina gilt:

$$\begin{aligned} V_{Zylinder} &= \pi r^2 \cdot h = 2\pi r^3 \\ V_{Kugel} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ V_{Kegel} &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{2}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Also folgt

$$V_{Zylinder} : V_{Kugel} : V_{Kegel} = 3 : 2 : 1.$$

Dieses Ergebnis wird auch **Satz des Archimedes** genannt.

5. Die Fläche der Kugelkappe ergibt sich durch

$$50 = A_{Kappe} = 2\pi r \cdot h = 2\pi r,$$

woraus sich der Radius der Kugel errechnen lässt:

$$r = \frac{25}{\pi} = 7,96\,cm.$$

Wir setzten die Werte in die Volumensformel für das Kugelsegment ein und erhalten

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) = \frac{\pi}{3} (23,88 - 1) = 23,96\,cm^3.$$

6. Die Fläche der Kugelkappe ergibt sich durch

$$40 = A_{Kappe} = 2\pi r \cdot h = 2\pi r,$$

woraus sich der Radius der Kugel errechnen lässt:

$$r = \frac{20}{\pi} = 6,37\,cm.$$

Damit folgt für das Volumen der Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1.082,7\,cm^3.$$